المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة

تأليف
د. خالد بن موسى الطاسان

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة
تأليف د. خالد بن موسى الطاسان



١٤٤٠هـ
2019

المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة

تأليف

د. خالد بن موسى الطاسان

قسم التحليل الكمي – كلية إدارة الأعمال – جامعة الملك سعود

الرياض – المملكة العربية السعودية



ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الطاسان، خالد بن موسى

المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة./ خالد بن موسى الطاسان. - الرياض، ١٤٤٠هـ.

٢٦٨ ص؛ ١٧ × ٢٤ سم

ردمك: ٣-٦٩١-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١- البرمجة الخطية ٢- إدارة الإنتاج أ. العنوان

ديوي ٥١٩,٧٢ ١٧٦٠/ ١٤٤٠

رقم الإيداع: ١٧٦٠/ ١٤٤٠

ردمك: ٣-٦٩١-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

هذا البحث صادر عن مركز بحوث كلية إدارة الأعمال، وقد وافق مجلس عمادة البحث العلمي على نشره بعد استيفائه الشروط العلمية للنشر بالجامعة في جلسته الثانية للعام الجامعي ١٤٣٩/ ١٤٤٠هـ بتاريخ ١٧/ ٣/ ١٤٣٩هـ.



مقدمة المؤلف

تعرف بحوث العمليات التطبيقية أو علم الإدارة على أنها فرع من علوم الرياضيات التطبيقة، والتي تبحث عن إيجاد الحل الأمثل للمشاكل التي تواجه الإدارة ومتخذي القرار، حيث تمتلك هذه المنشآت موارد محدودة مما يستدعي استخدام هذه الموارد بأفضل طريقة. ولقد بدأ استخدام بحوث العمليات منذ الحرب العالمية الأولى، حيث تم استخدامها في المجال العسكري ومن ثم شاع استخدامها وتسارع تطورها في مجالات عدة منها مجالات إدارة الأعمال والهندسة حتى أصبحت تخصصاً أساسياً في كثير من الجامعات. كما أن التقدم التقني وتطور أجهزة الحاسوب ساعد في استخدام بحوث العمليات التطبيقة في المجالات الاقتصادية والإدرية والهندسية وامتد استخدامها في المشاريع الخيرية والرياضية وغيرها كثير.

ومن أهم مواضيع بحوث العمليات التطبيقية هو البرمجة الخطية والتي لاقت اهتماماً واستخداماً كبيراً في كثير من منشأت الأعمال مما استدعى مقابلة ذلك بوجود مراجع تدعم طلاب الجامعات في مرحلة البكالوريوس وطلاب ماجستير إدارة الأعمال. وعلى الرغم من انتشار تطبيق البرمجة الخطية في العالم أجمع وما واطبها من تطور تقني، فإنها لم تجد اهتماماً مماثلاً في الكتب والمراجع العربية يتماشى مع هذا الاستخدام العالمي. ولقد بدأت فكرة كتابة هذا الكتاب نتيجة لتشتت مواضيع البرمجة الخطية في المراجع العربية.

يهدف هذا الكتاب إلى تقديم موضوع البرمجة الخطية وتطبيقاتها في المجالات الإدارية إلى طلاب مرحلة البكالوريوس والماجستير في كلية إدارة الأعمال. وتشمل موضوعات الكتاب الموضوعات التالية:

• صياغة البرنامج الخطي: الصياغة الرياضية للبرنامج الخطي مع أمثلة متنوعة في مجالات إدارة الأعمال.

• حل البرنامج الخطي باستخدام الرسم البياني: حل البرنامج الخطي عندما تكون المسألة تتضمن متغيرين للقرار فقط.

• حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس: حل البرنامج الخطي عندما تكون متغيرات القرار أكثر من اثنين وهي الحالة الغالبة في الواقع.

• تحليل الحساسية والثنائية: تحليل مخرجات البرنامج الخطي، ومعرفة الأسعار الثنائية للموارد لصنع القرارات المناسبة.

• مسألة النقل: أحد أهم تطبيقات البرمجة الخطية، ومعرفة بعض الطرق الخاصة لحل مسائل النقل باستخدام جداول النقل.

• مسألة التخصيص: أحد تطبيقات البرمجة الخطية، وإن كانت تتطلب أعداداً صحيحة، وسنتعرف على حل هذا النوع من المسائل باستخدام الطريقة الهنغارية.

• برمجة الأعداد الصحيحة الخطية: هي برمجة خطية، ولكن بعد تغيير فرضية الاستمرارية إلى فرضية الأعداد الصحيحة فقط، وسنتعرف على أنواع برمجة الأعداد الصحيحة الخطية، وعلى استخدام الشروط المنطقية فيها.

خالد الطاسان

المحتويات

الفصل الأول

التمهيد

يهتم هذا الكتاب بحل المشاكل التي تواجه الإدارة باستخدام النماذج الكمية (Quantitative Models) في بحوث العمليات (Operations Research)، وعلم الإدارة (Management Science)، وهما اسمان يقدمان المعنى نفسه، ولاسيما أن المنظمتين الكبيرتين جمعية بحوث العمليات الأمريكية (ORSA)، ومعهد علم الإدارة (TIMS) قد انضمتا في العام ١٩٩٥ تحت اسم معهد بحوث العمليات، وعلم الإدارة (INFORMS). وقبل الحديث عن النماذج الكمية لابد من تقديم تعريف لمصطلح بحوث العمليات، فقد عرَّفها معهد بحوث العمليات وعلم الإدارة (INFORMS) وجمعية بحوث العمليات في المملكة المتحدة (The OR Society of the UK) بأنها علم يستخدم ويطبق الطرق التحليلية المتقدمة للمساعدة في الحصول على قرارات أفضل:

(Operations Research (O.R.) is the discipline of applying advanced analytical methods to help make better decisions).

أما اتحاد جمعيات بحوث العمليات الأوروبية (EURO)، فقد عرفتها بأنها طريقة علمية لحل المشكلات في الأنظمة الإدارية المعقدة:

(A scientific approach to the solution of problems in the management of complex systems).

كما عرفتها دائرة المعارف البريطانية المختصرة بأنها تطبيق الطرق العلمية لإدارة الأنظمة العسكرية والحكومية والتجارية والصناعية:

(Application of scientific methods to management and administration of military, government, commercial, and industrial systems).

أما دائرة المعارف للعلوم والتقنية، فقد عرفتها بأنها تطبيق الطرق والأساليب العلمية للمشاكل التي تتعلق باتخاذ القرارات:

(The application of scientific methods and techniques to decision-making problems).

و باختصار يمكن القول إن بحوث العمليات هي طرق علمية رياضية تساعد الإدارة لحل المشاكل التي تواجهها. ولما كانت النماذج الكمية مثلها مثل أي نموذج آخر مستخدم في أي علم آخر (مثل الفيزياء، الاقتصاد، الفنون وغيرها)، فإنه يمكن تعريف النموذج بالعموم على أساس أن " النموذج تمثيل مبسط للواقع". والنماذج الكمية هي تمثيل مبسط للواقع بأسلوب كمي (رياضي) تصب في مصلحة اتخاذ القرارات (Decision Making)، ومنها يتم حل المشاكل ذات الطابع الكمي باستخدام هذه النماذج. ويمكن استخدام النماذج الكمية في مجالات كثيرة مثل الإحصاء، والهندسة، والإدارة، وغيرها، لكن ما يهمنا هنا هو استخدام النماذج الكمية لبحوث العمليات في مجالات الإدارة. ويمكن تقسيم النماذج الكمية المستخدمة في بحوث العمليات على أساس مدى التأكد (Certainty) من المدخلات إلى:

١ - نماذج محددة (Deterministic Models).

٢ - نماذج احتمالية (Probabilistic Models).

فالنماذج المحددة (D) تكون المدخلات فيها (مثل التكاليف، والأسعار، وساعات العمل) معلومة بتأكد تام، ومثال ذلك الزمن المستغرق لتعبئة المرطبات آلياً في مصنع للمشروبات الغازية. أما النماذج الاحتمالية (P) فتكون واحدة أو أكثر من مدخلاتها غير مؤكدة، ويمكن قياسها باستخدام أحد التوزيعات الاحتمالية المناسبة، ومثال ذلك أن عدد الأشخاص الراغبين في الحلاقة لدى أحد محلات الحلاقة بالساعة عدد غير معروف بشكل مؤكد.

يمثل الجدول التالي (جدول رقم ١ , ١) النماذج الكمية المستخدمة في بحوث العمليات:

جدول رقم (١ , ١). يمثل النماذج الكمية المستخدمة في بحوث العمليات.

النموذج	التصنيف من حيث التأكد	مدى التطبيق
البرمجة الخطية	D	High
الشبكات	D,P	High
إدارة المخازن	D,P	High
الإنتاج	D,P	High
الجدولة	D,P	High
التنبؤ	D,P	High
المحاكاة	D,P	High
برمجة الأعداد الصحيحة	D	Low

تابع جدول رقم (١ , ١).

النموذج	التصنيف من حيث التأكد	مدى التطبيق
البرمجة غير الخطية	D	Low
البرمجة الديناميكية	D,P	Low
نظرية الألعاب	P	Low
نظرية الصفوف	P	Low

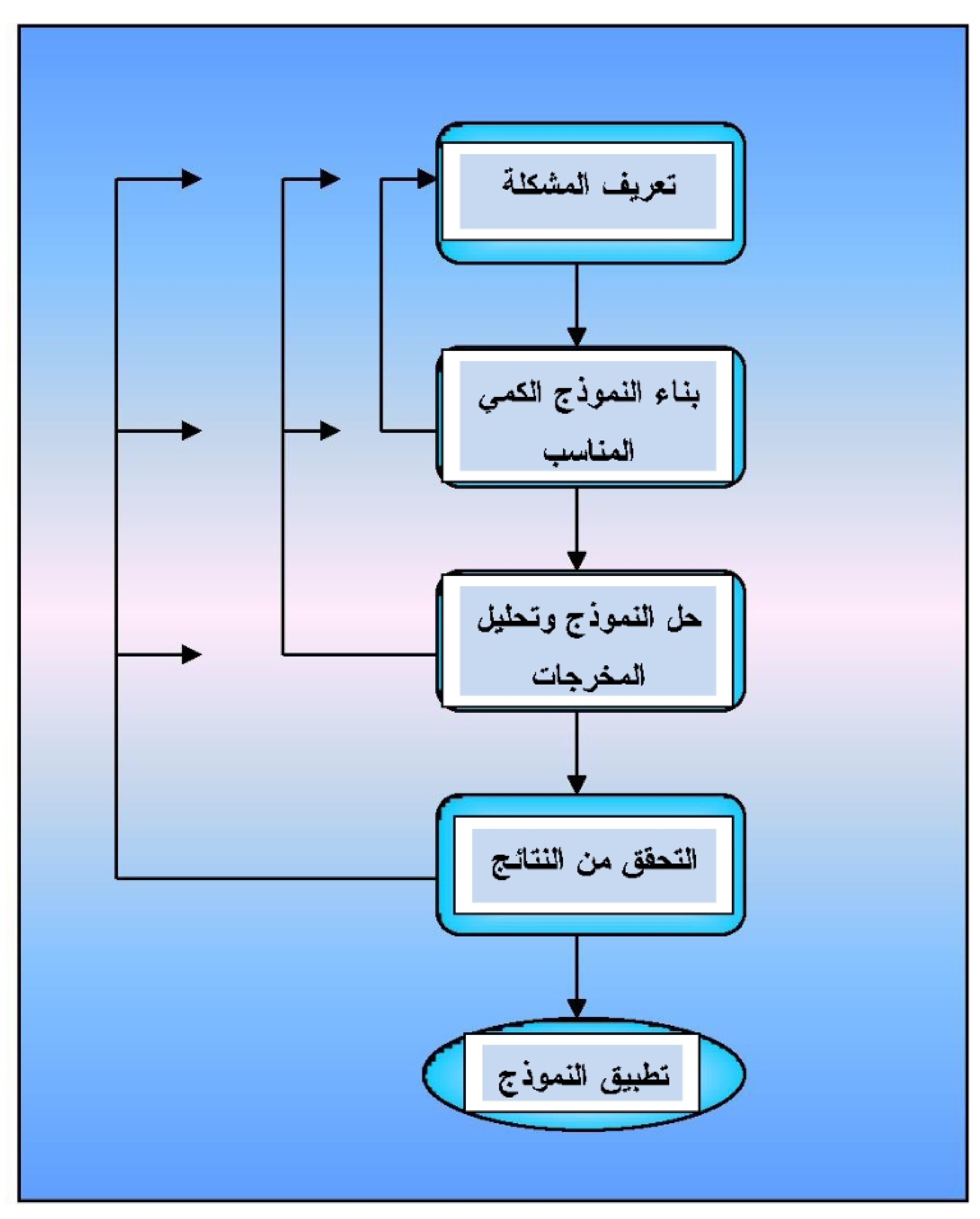
من هذا الجدول نلاحظ أن بعض النماذج محددة فقط، وبعض النماذج احتمالية فقط، وهناك نماذج تقبل الأمرين حسب البيانات (المدخلات) المتوفرة.

ويجب ملاحظة أن أي نموذج كمي لا يمكن أن يضمن اتخاذ القرار الأفضل دائماً، لكن هناك وسائل تساعد على الحصول على أفضل القرارات الممكنة، وذلك باستخدام الأسلوب العلمي لاتخاذ القرارات، والذي يُعرف بالمراحل العلمية في بحوث العمليات [Taylor III, 2010] . الشكل رقم (١ , ١) يوضح تسلسل هذه المراحل:

المرحلة الأولى: تعريف المشكلة: وهي أهم مرحلة حيث إن الخطأ في تعريف المشكلة يؤدي إلى نتائج غير مرغوبة. ولابد من ملاحظة أن المشكلة لا تعني أن الوضع سيئ في المنشأة، فقد تكون المشكلة هي في الرغبة في تحسين حجم الأرباح وزيادتها بدلاً من ١٠٠٠٠٠٠ ريال إلى ١٢٠٠٠٠٠ ريال، ولذلك يجب ألا نتعامل مع المشكلة كما تعنيه هذه الكلمة لغوياً. وتكمن الصعوبة في هذه الخطوة في معرفة كيفية البدء، وذلك في ظروف مثل أن البيانات مشتتة، وغير واضحة، الاختلاف في تقدير الأمور بين الإدارات، عدم وضوح ما تريده الإدارة العليا في المنشأة، ضيق الوقت، ضعف حجم الميزانية المخصصة لهذا العمل، لكن كل هذه الظروف وغيرها من الأمور الطبيعية التي يواجهها الباحث، ولذلك لابد من إيجاد الطريقة المناسبة؛ لتقليل تأثير هذه الظروف على عمله. ولتعريف المشكلة بشكل سليم يجب اتباع الوسائل التالية:

- **تقرير ماهية المشكلة في العموم:** قد يواجه الباحث معضلة أن الإدارة لا تعرف ما هي المشكلة؟ ولا تستطيع أن تحددها، لكن نتائج أعمالها تدل على أن هناك مشكلة، وقد تكون الإدارة تعرف المشكلة، ولكنها غير متأكدة منها، ومن هنا يتجلى على الباحث عبء معرفة المشكلة الحقيقية.

- **تحديد وتعريف الظروف المحيطة بالمشكلة:** يجب على الباحث معرفة الظروف المحيطة بالمنشأة، وبالمشكلة محل الدراسة، سواءً أكانت هذه الظروف داخلية (الإدارة، أو العمالة، أو الصيانة، أو غيرها)، أو خارجية (الموردين، أو الزبائن، أو حجم السوق، وغيرها).



الشكل رقم (١ ,١). يوضح تسلسل المراحل العلمية في بحوث العمليات.

- **مراقبة العمل**: يجب أن تكون مراقبة العمل شاملة، ومثال ذلك مراقبة سير العملية الإنتاجية من البداية إلى النهاية، ومعرفة شخصية ودور كل من يشارك فيها. كذلك النظر إلى الأمور من مختلف الزوايا ووجهات النظر سواءً من قبل الإدارة المالية، أو التسويقية، أو من قبل إدارة العمليات، وغيرها، وكذلك الإلمام بالظروف الخارجية الأخرى المؤثرة على العمل.
- **التواصل مع الإدارة**: على الباحث الاهتمام بمسألة التواصل مع الإدارة طوال فترة دراسة المشكلة؛ وذلك ليتسنى له الحصول على تعريف صحيح للمشكلة، والابتعاد عن أي أخطاء في تفسير الأمور.

المرحلة الثانية: بناء النموذج الكمي المناسب: يقوم الباحث بالاستفادة من جميع البيانات التي قام بجمعها في الخطوة السابقة، وذلك من أجل وضع نموذج كمي مناسب لحل المشكلة محل الدراسة، ويتم ذلك كالتالي:

- **تحديد وتعريف متغيرات القرار (Decision Variables)**: تحديد متغير القرار هو من أصعب المهام في بناء النموذج، ولابد من التمييز بين نوعين من المدخلات التي يمكن التحكم بها (Controllable Inputs)، والتي تتضمن متغيرات القرار (مثل عدد ساعات العمل الإضافية)، والمدخلات التي لا يمكن التحكم بها (Uncontrollable Inputs)، والتي أيضاً تسمى معالم (parameter)، وهذا النوع لا يمكن تغييره إلا بتغيير الأصل (مثل الطاقة الإنتاجية القصوى للآلة). وعلى الباحث تحديد متغيرات القرار بدقة، وذلك عن طريق الإجابة عن سؤال ماذا يريد تحقيقه من دراسة هذه المشكلة؟
- **تحديد الهدف والقيود كمياً**: هنا لابد أن يكون الباحث قادراً على تحديد الهدف (Objective) الذي يريد تحقيقه، وكذلك تحديد وبشكل شامل جميع القيود (Constraints)، والشروط التي تؤثر على هذه المشكلة، والتي تتمثل بالإمكانات المتاحة والظروف المحيطة بالمشكلة، ومن ثم القدرة على التعبير عن الهدف والقيود لهذه المشكلة رياضياً.
- بناء هيكل النموذج: يقوم الباحث هنا بكتابة المشكلة كاملةً بشكل صيغة رياضية يمكن حلها، واستخراج النتائج.

المرحلة الثالثة: حل النموذج وتحليل المخرجات: يقوم الباحث بحل النموذج الكمي، وتحديد أفضل الحلول أو الحلول المثلى (Optimal Solutions)، ومن ثم تحليلها باستخدام الوسائل التقليدية أو الحاسب الآلي لإظهار كثيرٍ من العلاقات التي تكون ذات جدوى في تحسين حل المشكلة

مستقبلاً، وهنا لابد من ملاحظة أن المشكلة قد تكون معقدة جداً، وحلها قد يستغرق وقتاً وجهداً كبيراً أو تكاليف ضخمة، ويمكن أن نرضى بحل قد لا يكون أفضل الحلول، ولكنه حل جيد وسريع باستخدام طريقة رياضية استدلالية (Heuristics).

المرحلة الرابعة: التحقق من النتائج: يقوم الباحث بمراجعة الحلول لهذه المشكلة، ومقارنتها، وإمكانية تطبيقها على الواقع، والتأكد أن هذا الحل هو الحل المناسب للمشكلة، وعلى الباحث العودة إلى كل أو بعض المراحل السابقة عند وجود صعوبة، أو مشكلة في التحقق من النتائج، أو في تطبيق الحل على الواقع. فمثلاً قد يحتاج للعودة إلى تعريف المشكلة، أو قد يحتاج إلى بناء نموذجٍ كميٍ آخر أكثر مناسبة لهذه المشكلة.

المرحلة الأخيرة: تطبيق النموذج: في هذه المرحلة يتم التطبيق بعد التأكد من صلاحية النموذج بناءً على الخطوات السابقة.

موضوع الكتاب

سيركز هذا الكتاب على البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة، حيث تعتبر من أكثر موضوعات بحوث العمليات استخداماً كما ذكرنا سابقاً في الجدول رقم (١ , ١)، وتظهر أهمية البرمجة الخطية الذي دفع إلى كثرة استخدامها إلى سهولتها مما سهَّل إمكانية صنع القرارات الإدارية المناسبة سواء من نتائج البرنامج الخطي، أو من نتائج تحليل الحساسية. سيتم ترتيب هذا الكتاب لعرض موضوعات البرمجة الخطية كالتالي:

- صياغة البرنامج الخطي: الصياغة الرياضية للبرنامج الخطي مع أمثلة متنوعة في مجالات إدارة الأعمال.
- حل البرنامج الخطي باستخدام الرسم البياني: حل البرنامج الخطي عندما تكون المسألة تتضمن متغيرين للقرار فقط.
- حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس: حل البرنامج الخطي عندما تكون متغيرات القرار أكثر من اثنين وهي الحالة الغالبة في الواقع.
- تحليل الحساسية والثنائية: تحليل مخرجات البرنامج الخطي، ومعرفة الأسعار الثنائية للموارد لصنع القرارات المناسبة.

- مسألة النقل: أحد أهم تطبيقات البرمجة الخطية، وهنا سنعرف بعض الطرق الخاصة لحل مسائل النقل باستخدام جداول النقل.
- مسألة التخصيص: أحد تطبيقات البرمجة الخطية، وإن كانت تتطلب أعداداً صحيحة، وسنتعرف على حل هذا النوع من المسائل باستخدام الطريقة الهنغارية.
- برمجة الأعداد الصحيحة الخطية: هي برمجة خطية، ولكن بعد تغيير فرضية الاستمرارية إلى فرضية الأعداد الصحيحة فقط، وسنتعرف على أنواع برمجة الأعداد الصحيحة الخطية، وعلى استخدام الشروط المنطقية فيها.

المراجع

References

Taylor III, Bernard: *Introduction to Management Science,* 10/E ,Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2010.

الفصل الثاني

البرمجة الخطية
Linear Programming

تعدُّ البرمجة الخطية من أهم مواضيع بحوث العمليات، وهي أداة يمكن استخدامها من قبل متخذ القرار لإيجاد أفضل الخيارات من مجموعة من الخيارات الممكنة. ويمكن القول إن اسم البرمجة الخطية مكونٌ من مقطعين الأول "برمجة"، وتعني أن حل هذا النوع من المسائل يلزم اتباع خطوات رياضية مسبقة أو مبرمجة والمقطع الثاني "خطية"، وتعني أن العلاقاتِ الرياضيةِ لهذا النوع هي علاقاتٌ خطيةٌ حيث إن هناك نوعًا آخر من البرمجة يُسمى برمجة غير خطية. وتُعرّف البرمجة الخطية بأنها أداةٌ رياضية من أدوات بحوث العمليات تُستخدم لإيجاد الحل الأمثل لتحقيق الهدف المطلوب، والمقيد بجملة من الشروط في ظل أن جميع العلاقات الرياضية هي علاقات خطية. وقد ظهر استخدام البرمجة الخطية في العام ١٩٤٧م عن طريق البروفيسور جورج دانتزج (George Dantzig) عندما كان يعمل في بداية حياته العملية في وزارة الدفاع الأمريكية كرئيس لإدارة التحليل الإحصائي في القوات الجوية [Gass, 2005]. وقد وجد دانتزج أن حلَ كثيرٍ من مسائل التخطيط في القوات الجوية ممكنٌ باستخدام المتراجحات الخطية، ومنذ ذلك الحين بدأ ظهور اسم "البرمجة في الأسس الخطية Programming in a Linear Structure"، التي اختصرت لاحقاً باسم البرمجة الخطية. ولكن قبل الدخول في دراسة البرمجة الخطية لابد لنا من معرفة الفرضيات التي تقوم عليها. تقوم البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات التي يجب توفرها عند الرغبة في حل المشكلة باستخدام البرمجة الخطية.

فرضيات البرمجة الخطية: [Vohra,1992]

١ - **التناسب (Proportionality)**: تعني هذه الفرضية أن معامل أي متغير سيبقى ثابتاً سواء كان في دالة الهدف أو في القيود. كمثال على ذلك لو أن الوحدة الواحدة من X_1 تعطي ربحاً قدره ١٠ ريالات، فإن ذلك يعني أن الربحية من هذا المنتج تساوي $10X_1$، فلو كانت $X_1=5$، فالربح من هذا المنتج يساوي ٥٠ ريالاً، ولو كانت $X_1=100$ فالربح من هذا المنتج يساوي ١٠٠٠ ريال. وهذا يعني أن قيمة المعامل لا تتغير بتغير قيمة X_1.

٢ - **التجميعية (Additivity)**: ويمكن التعبير عنها **بالخطية (Linearity)**، وتعني هذه الفرضية أنه لا يوجد تداخل بين متغيرات القرار سواءً في القيود أو في دالةِ الهدف. فدالة الهدف ما هي إلا مجموع الأرباح أو الإيرادات أو التكلفة الناتجة من جميع متغيرات القرار، والقيد ما هو إلا مجموع الموارد المستهلكة أو مجموع المنتجات، أو باختصار هو مجموع القيم المشترطة لهذا القيد. وعلى هذا فيمكن فقط استخدام إشارة الجمع (+) أو الطرح (-) فقط، ولا يجوز أن يكون هناك أي عملية حسابية تتعلق بالضرب أو القسمة للمتغيرات.

الشكل الرياضي	قبوله في البرمجة الخطية
$5X + 4Y \leq 100$	مقبول
$4X^2 - 2 \log Y \geq 10$	غير مقبول لوجود الأسس واللوغاريتم
$2XY \geq 15$	غير مقبول لضرب المتغيرات ببعضها
$\sqrt[3]{3X}\ \frac{2Y}{4X} = 120$	غير مقبول لوجود القسمة والضرب والجذر

٣- **الاستمرارية (Continuity)**: تعني هذه الفرضية أن قيم المتغيرات تأخذ قيماً مستمرة بمعنى أنها يمكن أن تأخذ قيماً كسرية فيمكن أن تكون قيمة المتغير ٥ , ٣ مثلاً.

٤ - **التأكد (Certainty)**: وتعني هذه الفرضية أن قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف، وكذلك في القيود، بالإضافة إلى الموارد المتاحة هي قيمٌ مؤكدةٌ وليست احتمالية.

٥ - **اختيارات محددة (Finite Choices)**: في البرنامج الخطي نفترض دائماً أن لدى متخذ القرار خيارات محددة (نهائية) منها أن قيم المتغيرات لها حدود قصوى ودنيا.

عناصر البرمجة الخطية: تتكون مسائل البرمجة الخطية من هدف نرغب في تحقيقه وقيود تقف حجر عثرة أمام تحقيق هذا الهدف [Taylor III, 2010]، وهذه العناصر هي:

١ - **هدف (Goal)**: يُعبَّر عنه في البرمجة الخطية بدالة الهدف (Objective Function)، وهو تعبير رياضي عن الهدف المطلوب تحقيقه. وتأخذ دالة الهدف دائماً أحد الشكلين التاليين:

٢ -تعظيم دالة الهدف أو تكبيرها Maximization.

٢ - تخفيض دالة الهدف أو تصغيرها Minimization.

و هنا لا بد من معرفة الهدف بشكل واضح ودقيق أثناء دراسة المشكلة، ومن ثم التعبير عن هذا الهدف بشكل رياضي.

٣ -**قيود (Constraints)**: وهي الشروط والعوائق التي تحد أو تمنع من تحقيق الهدف، ومثالها ساعات العمل أو المواد الخام المتاحة في اليوم. ويمكن التعبير عن هذه القيود رياضياً بشكل متراجحات ذات اتجاه أكبر من، أو أصغر من، أو معادلات.

٤ -**قيد عدم السلبية Non-negativity Constraint**: تفترض البرمجة الخطية أن قيم المتغيرات أحياناً لا تأخذ قيماً سالبة، فلا يمكن مثلاً إنتاج عدد سالب من الثلاجات، ولذلك نعبر عن المتغيرات رياضياً بالشكل التالي: $X \geq 0, Y \geq 0$. وهذا العنصر لازم لحل مسائل البرمجة الخطية على الرغم من أننا قد نواجه في بعض الأحيان متغيرات لا تلتزم بهذا الشرط (كما سنرى لاحقاً)، التي يجب معالجتها لتحويلها إلى متغيرات غير سالبة لنتمكن من حل مسائل البرمجة الخطية.

تصوّر أنك تشارك في سباق الجري في بطولة العالم لمسافة ١٥٠٠ متر في ماليزيا في شهر يناير، وأن هدفك هو تحقيق إحدى الميداليات الثلاث الأولى، خاصة الميدالية الذهبية، فإنه لتحقيق هذا الهدف يجب أن تصل إلى خط النهاية في أسرع وقت ممكن. تصوّر أيضاً أنك ستواجه كثيراً من المصاعب التي يجب عليك تخطيها؛ نتيجةً لإقامة السباق في ماليزيا، وفي شهر يناير، ومنها: سرعة الرياح، والأمطار، وارتفاع درجة الرطوبة. هنا أنت أمام هدف تريد تحقيقه، ولكن هناك عوائق (قيود) أمام هذا الهدف.

عناصر البرمجة الخطية: تتكون مسائل البرمجة الخطية من هدف نرغب في تحقيقه وقيود تقف حجر عثرة أمام تحقيق هذا الهدف [Taylor III, 2010]، وهذه العناصر هي:

١ - **هدف (Goal)**: يُعبَّر عنه في البرمجة الخطية بدالة الهدف (Objective Function)، وهو تعبير رياضي عن الهدف المطلوب تحقيقه. وتأخذ دالة الهدف دائماً أحد الشكلين التاليين:

٢ -تعظيم دالة الهدف أو تكبيرها Maximization.

٢ - تخفيض دالة الهدف أو تصغيرها Minimization.

و هنا لا بد من معرفة الهدف بشكل واضح ودقيق أثناء دراسة المشكلة، ومن ثم التعبير عن هذا الهدف بشكل رياضي.

٣ -**قيود (Constraints)**: وهي الشروط والعوائق التي تحد أو تمنع من تحقيق الهدف، ومثالها ساعات العمل أو المواد الخام المتاحة في اليوم. ويمكن التعبير عن هذه القيود رياضياً بشكل متراجحات ذات اتجاه أكبر من، أو أصغر من، أو معادلات.

٤ -**قيد عدم السلبية Non-negativity Constraint**: تفترض البرمجة الخطية أن قيم المتغيرات أحياناً لا تأخذ قيماً سالبة، فلا يمكن مثلاً إنتاج عدد سالب من الثلاجات، ولذلك نعبر عن المتغيرات رياضياً بالشكل التالي: $X \geq 0, Y \geq 0$. وهذا العنصر لازم لحل مسائل البرمجة الخطية على الرغم من أننا قد نواجه في بعض الأحيان متغيرات لا تلتزم بهذا الشرط (كما سنرى لاحقاً)، التي يجب معالجتها لتحويلها إلى متغيرات غير سالبة لنتمكن من حل مسائل البرمجة الخطية.

تصوّر أنك تشارك في سباق الجري في بطولة العالم لمسافة ١٥٠٠ متر في ماليزيا في شهر يناير، وأن هدفك هو تحقيق إحدى الميداليات الثلاث الأولى، خاصة الميدالية الذهبية، فإنه لتحقيق هذا الهدف يجب أن تصل إلى خط النهاية في أسرع وقت ممكن. تصوّر أيضاً أنك ستواجه كثيراً من المصاعب التي يجب عليك تخطيها؛ نتيجةً لإقامة السباق في ماليزيا، وفي شهر يناير، ومنها: سرعة الرياح، والأمطار، وارتفاع درجة الرطوبة. هنا أنت أمام هدف تريد تحقيقه، ولكن هناك عوائق (قيود) أمام هذا الهدف.

الشكل الافتراضي الرياضي لمسائل البرمجة الخطية في حالة التكبير هي [Winston, 2004] :

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Subject To

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{for } i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1,2,\ldots,n$$

وذلك لأنه في حالة التكبير نرغب في تكبير العائد z من المنتج x_j في ظل أن القيود تأخذ اتجاهاً أصغر من، مما يعني أن الكمية a_{ij} اللازمة لإنتاج المنتج x_j تأخذ كمياتها من المورد المحدود b_i.

الشكل الافتراضي الرياضي لمسائل البرمجة الخطية في حالة التصغير هي:

$$\text{Min } w = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Subject To

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{for } i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1,2,\ldots,n$$

وذلك لأنه في حالة التصغير نرغب في تصغير التكاليف c_j من المنتج x_j في ظل أن القيود تأخذ اتجاهاً أكبر من، مما يعني أن هناك حداً أدنى من الالتزامات b_i لابد من إيفائها عند إنتاج المنتـــج x_j.

لكن في الواقع العملي فإن مسائل البرمجة الخطية تأخذ خليطاً من القيود ذات الاتجاه أكبر من، وأصغر من، وحتى المعادلات في كلتا الحالتين (التكبير، والتصغير).

و لحل مسائل البرمجة الخطية لابد من عمل التالي [Moore et al, 2001]:

- تعريف **الهدف Goal** بدقة ووضوح وتحديده كمياً.
- تعريف **متغيرات القرار Decision Variables** في المسألة وإمكانية حسابها كمياً.
- التحديد الكمي لجميع **الموارد المحددة Limited Resources**، واللازمة لتحقيق الهدف في المسألة مثل المواد الخام وساعات العمل المتاحة.

• التحديد الكمي لجميع **التعليمات المقيدة Restrictive Guidelines**، والمستخدمة لتحقيق الهدف في المسألة مثل المقادير اللازمة لعمل الخبز.

• التأكد أن جميع العلاقات في القيود ودالة الهدف هي علاقات خطية Linear.

أمثلة على صياغة مسائل البرمجة الخطية:

مثال عام (١ , ١):

تقوم شركة الوسطى الصناعية بتوريد ثلاثة أنواع من المواد الخام المختلفة (A,B,C). فإذا علمت أن الشركةَ مطالبةٌ بتوريد على الأقل ١٢ وحدة من النوع الأول، و١٠ وحدات من النوع الثاني، و١٤ وحدة من النوع الثالث إلى عملائها، وإذا علمت أيضًا أن هذه المواد الخام تُشترى من قبل شركة الوسطى على شكل صناديق، وكل صندوق يحتوي على كميات مختلفة من المواد الخام. يبين الجدول التالي عدد الوحدات من كل نوع في كل صندوق، وتكلفة الصندوق الواحد بالريال لكل نوع، والمطلوب كتابة الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي لتخفيض تكلفة الشراء.

التكلفة للصندوق	C	B	A	الصندوق
1200	1	2	1	الأبيض
1900	1	2	3	الأزرق
1500	5	1	1	الأحمر

الحل: هدفنا في هذه المسألة هو تخفيض (Min) تكلفة شراء الصناديق، وهي التكلفة التي يمكن حسابها كالتالي:

تكلفة الشراء = (عدد الصناديق البيضاء × تكلفة الصندوق الأبيض) + (عدد الصناديق الزرقاء × تكلفة الصندوق الأزرق) + (عدد الصناديق الحمراء × تكلفة الصندوق الأحمر).

و حيث إن تكلفة كل صندوق معلومة، وأن المجهول فقط في هذه المسالة هو عدد الصناديق فإن متغيرات **القرار (Decision Variables)**، هي عدد الصناديق من كل نوع.

X_1: عدد الصناديق البيضاء المطلوب شراؤها.

X_2: عدد الصناديق الزرقاء المطلوب شراؤها.

X_3: عدد الصناديق الحمراء المطلوب شراؤها.

و عليه فإن دالة الهدف ستُكتب رياضياً كالتالي:

$$Min\ w = 1200X_1 + 1900X_2 + 1500X_3$$

و القيد (الشرط) الأول لهذه المسألة يخص تأمين عدد ١٢ وحدة على الأقل (مما يعني توريد ١٢ وحدة أو أكثر) من المادة الخام A لتوريدها إلى العميل، والتي يمكن التعبير عنها كالتالي:

[(عدد وحدات المادة الخام A في الصندوق الأبيض × عدد الصناديق البيضاء) + (عدد وحدات المادة الخام A في الصندوق الأزرق × عدد الصناديق الزرقاء) + (عدد وحدات المادة الخام A في الصندوق الأحمر × عدد الصناديق الحمراء)] أكبر من، أو تساوي عدد الوحدات من المادة الخام A المطلوبة.

و يمكن التعبير رياضياً عن هذا القيد كالتالي:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 12$$

و بالمثل يمكن التعامل مع القيود الخاصة بالمادة الخام B والمادة الخام C كما يلي:

[(عدد وحدات المادة الخام B في الصندوق الأبيض × عدد الصناديق البيضاء) + (عدد وحدات المادة الخام B في الصندوق الأزرق × عدد الصناديق الزرقاء) + (عدد وحدات المادة الخام B في الصندوق الأحمر × عدد الصناديق الحمراء)] أكبر من أو تساوي عدد الوحدات من المادة الخام B المطلوبة.

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10$$

[(عدد وحدات المادة الخام C في الصندوق الأبيض × عدد الصناديق البيضاء) + (عدد وحدات المادة الخام C في الصندوق الأزرق × عدد الصناديق الزرقاء) + (عدد وحدات المادة الخام C في الصندوق الأحمر × عدد الصناديق الحمراء)] أكبر من أو تساوي عدد الوحدات من المادة الخام C المطلوبة.

$$X_1 + X_2 + 5X_3 \geq 14$$

وأخيراً، يبقى لنا قيد وحيد وهو قيد عدم السلبية (حيث إن عدد الصناديق المطلوب شراؤها من كل لون لا يمكن أن يكون سالباً، فإما أن يتم الشراء وتكون الكميةُ موجبةً، وإما لا يتم الشراء وتكون الكميةُ صفراً) ويظهر بالشكل التالي:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الصيغة الرياضية للمسألة ستظهر على شكل برنامج خطي كما يلي:

$Min\ w = 1200X_1 + 1900X_2 + 1500X_3$

Subject To

$X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 12$

$2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10$

$X_1 + X_2 + 5X_3 \geq 14$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

و عليه فإن دالة الهدف ستُكتب رياضياً كالتالي:

$$\text{Min } w = 1200X_1 + 1900X_2 + 1500X_3$$

و القيد (الشرط) الأول لهذه المسألة يخص تأمين عدد ١٢ وحدة على الأقل (مما يعني توريد ١٢ وحدة أو أكثر) من المادة الخام A لتوريدها إلى العميل، والتي يمكن التعبير عنها كالتالي:

[(عدد وحدات المادة الخام A في الصندوق الأبيض × عدد الصناديق البيضاء) + (عدد وحدات المادة الخام A في الصندوق الأزرق × عدد الصناديق الزرقاء) + (عدد وحدات المادة الخام A في الصندوق الأحمر × عدد الصناديق الحمراء)] أكبر من، أو تساوي عدد الوحدات من المادة الخام A المطلوبة.

و يمكن التعبير رياضياً عن هذا القيد كالتالي:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 12$$

و بالمثل يمكن التعامل مع القيود الخاصة بالمادة الخام B والمادة الخام C كما يلي:

[(عدد وحدات المادة الخام B في الصندوق الأبيض × عدد الصناديق البيضاء) + (عدد وحدات المادة الخام B في الصندوق الأزرق × عدد الصناديق الزرقاء) + (عدد وحدات المادة الخام B في الصندوق الأحمر × عدد الصناديق الحمراء)] أكبر من أو تساوي عدد الوحدات من المادة الخام B المطلوبة.

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10$$

[(عدد وحدات المادة الخام C في الصندوق الأبيض × عدد الصناديق البيضاء) + (عدد وحدات المادة الخام C في الصندوق الأزرق × عدد الصناديق الزرقاء) + (عدد وحدات المادة الخام C في الصندوق الأحمر × عدد الصناديق الحمراء)] أكبر من أو تساوي عدد الوحدات من المادة الخام C المطلوبة.

$$X_1 + X_2 + 5X_3 \geq 14$$

وأخيراً، يبقى لنا قيد وحيد وهو قيد عدم السلبية (حيث إن عدد الصناديق المطلوب شراؤها من كل لون لا يمكن أن يكون سالباً، فإما أن يتم الشراء وتكون الكميةُ موجبةً، وإما لا يتم الشراء وتكون الكميةُ صفراً) ويظهر بالشكل التالي:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الصيغة الرياضية للمسألة ستظهر على شكل برنامج خطي كما يلي:

$\text{Min } w = 1200X_1 + 1900X_2 + 1500X_3$

Subject To

$X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 12$

$2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10$

$X_1 + X_2 + 5X_3 \geq 14$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

يلاحظ أننا كتبنا عبارة Subject To والتي تعني بشرط أن أو مقيدٌ بأن وذلك بعد دالة الهدف للدلالة على أن الهدف مقيدٌ بالقيود، ويمكن اختصارها بالرموز .S.T.

كما يلاحظ أن جميع العلاقات خطية سواءً في دالة الهدف أو في القيود، وأن جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف، أو في القيود، وكذلك قيمة الجانب الأيمن في القيود الذي يمثل الكميات المطلوب توريدها هي قيمٌ معلومةٌ بشكلٍ مؤكدٍ، وأن قيمَ المتغيرات يمكن أن تأخذَ أي قيمة كسرية، أو غير كسرية إلا القيم السالبة، وهذه كلها من فرضيات البرمجة الخطية.

مثال (٢ , ١) (استثمار):

محمدٌ لديه رغبة في استثمار ١٠ , ٠٠٠ , ٠٠٠ ريال في شراء أسهم لثلاث شركات (الزراعية، والصناعية، والفندقية)، وفي شراء عقارات على شكل بيوت صغيرة متماثلة لتأجيرها، وفي شراء دكاكين صغيرة متماثلة لتأجيرها. يبين الجدول التالي تكاليف الشراء بالريال والعائد السنوي المتوقع، والحد الأقصى للاستثمار. فإذا علمت أن عدد الدكاكين الصغيرة المشتراة يجب ألا يقل عن ضعف عدد البيوت الصغيرة المشتراة وأن محمداً ملزمٌ بشراء ما لا يقل عن ٢٠ , ٠٠٠ سهم في الشركة الزراعية و١٥ , ٠٠٠ سهم في الشركة الفندقية. اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل LP لتكبير العائد السنوي المتوقع.

الاستثمار	تكلفة الشراء للوحدة	العائد السنوي المتوقع للوحدة	الحد الأقصى
سهم الشركة الزراعية	35	5%	11,000 سهم
سهم الشركة الصناعية	70	9%	لا يوجد
سهم الشركة الفندقية	40	6%	لا يوجد
البيت الصغير	400,000	35,000	15 بيتاً
الدكان	80,000	11,000	20 دكاناً

الحل: كما فعلنا سابقاً، نبدأ بتحديد الهدف المطلوب تحقيقه، وهو في هذه المسألة تكبير (Max) العائد السنوي المتوقع من الاستثمار في هذه الفرص الاستثمارية، وحيث إن العائد السنوي ما هو إلا

مجموع العوائد التي يمكن حسابها بالشكل التالي:

مجموع العائد السنوي المتوقع = (عدد الأسهم الزراعية المشتراة × عائدها السنوي المتوقع) + (عدد الأسهم الصناعية المشتراة × عائدها السنوي المتوقع) + (عدد الأسهم الفندقية المشتراة × عائدها السنوي المتوقع) + (عدد البيوت الصغيرة المشتراة × عائدها السنوي المتوقع) + (عدد الدكاكين المشتراة × عائدها السنوي المتوقع).

و حيث إن المجهول هنا هو عدد الأسهم من كل نوع، وعدد البيوت، وعدد الدكاكين، وحيث إن مجموع العائد السنوي يعتمد على تحديد هذه القيم المجهولة، فإن متغيرات القرار هي:

X_1: عدد أسهم الشركة الزراعية المطلوب شراؤها.

X_2: عدد أسهم الشركة الصناعية المطلوب شراؤها.

X_3: عدد أسهم الشركة الفندقية المطلوب شراؤها.

X_4: عدد البيوت الصغيرة المطلوب شراؤها.

X_5: عدد الدكاكين الصغيرة المطلوب شراؤها.

لكن لا بد من إيجاد العائد السنوي المتوقع للشركات الثلاث (الزراعية ، والصناعية، والفندقية) حيث إن ما لدينا هنا هو نسبة العائد السنوي.

العائد السنوي المتوقع = نسبة العائد × تكلفة السهم.

إذاً، العائد السنوي المتوقع لسهم الشركة الزراعية = ٥٪ × ٣٥ = ١,٧٥ ريالاً،

العائد السنوي المتوقع لسهم الشركة الصناعية = ٩٪ × ٧٠ = ٦,٣٠ ريالاً،

العائد السنوي المتوقع لسهم الشركة الفندقية = ٦٪ × ٤٠ = ٢,٤٠ ريالاً.

ودالة الهدف يمكن التعبير عنها كالتالي:

$$\text{Max } z = 1.75X_1 + 6.3X_2 + 2.4X_3 + 35000X_4 + 11000X_5$$

أما القيد الأول فيمكن تخصيصه للمبلغ المعد للاستثمار وهو ١٠,٠٠٠,٠٠٠ ريال وسيتم صرفه على الفرص الاستثمارية الخمس، أو بعبارة أخرى فإن المبالغ المدفوعة للاستثمارات يجب ألا تتجاوز ١٠,٠٠٠,٠٠٠ ريال، ويمكن التعبير عن هذا المبلغ المخصص للاستثمار كما يلي:

[(عدد الأسهم الزراعية المشتراة × قيمة السهم) + (عدد الأسهم الصناعية المشتراة × قيمة السهم) + (عدد الأسهم الفندقية المشتراة × قيمة السهم) + (عدد البيوت الصغيرة المشتراة × قيمة البيت الواحد) + (عدد الدكاكين المشتراة × قيمة الدكان الواحد)] أصغر من أو تساوي ١٠,٠٠٠,٠٠٠ ريال.

$$35X_1 + 70X_2 + 40X_3 + 400000X_4 + 80000X_5 \leq 10000000$$

الحدود القصوى للاستثمار يمكن أن توضع في قيود على أساس أن عدد الأسهم الزراعية يجب ألا يتجاوز ١٠٠٠٠٠ سهم وأن عدد البيوت الصغيرة يجب ألا يتجاوز ١٥ بيتاً، وأن عدد الدكاكين يجب ألا يتجاوز ٢٠ دكاناً. ويمكن التعبير عن ذلك كله بالقيود التالية:

$$X_1 \le 100000$$
$$X_4 \le 15$$
$$X_5 \le 20$$

كذلك الحدود الدنيا للاستثمار يمكن أن توضع في قيود على أساس أن عدد الأسهم الزراعية يجب ألا يقل عن ٢٠٠٠٠ سهم وأن عدد الأسهم الفندقية يجب ألا يقل عن ١٥٠٠٠ سهم بالقيود التالية:

$$X_1 \ge 20000$$
$$X_3 \ge 15000$$

كما أن هناك قيداً آخر يخص الاشتراط بأن عدد الدكاكين الصغيرة المشتراة يجب ألا يقل عن ضعف عدد البيوت الصغيرة المشتراة، أو بعبارةٍ أخرى، إن عدد الدكاكين الصغيرة المشتراة يجب أن يزيد أو يساوي ضعف عدد البيوت الصغيرة المشتراة، التي يمكن التعبير عنها رياضياً بالتالي:

$$X_5 \ge 2X_4$$

وحيث إن الجانب الأيمن يكون بدون متغيرات (ثابت فقط)، فيمكن إعادة كتابة هذا القيد بالشكل التالي:

$$X_5 - 2X_4 \ge 0$$

أخيراً نحتاج إلى كتابة قيد عدم السلبية، وتكون الصيغة النهائية للمسألة كما يلي:

$$\text{Max } z = 1.75X_1 + 6.3X_2 + 2.4X_3 + 35000X_4 + 11000X_5$$

Subject To

$$35X_1 + 70X_2 + 40X_3 + 400000X_4 + 80000X_5 \le 10000000$$
$$X_1 \le 100000$$
$$X_1 \ge 20000$$
$$X_3 \ge 15000$$
$$X_4 \le 15$$
$$X_5 \le 20$$
$$X_5 - 2X_4 \ge 0$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$$

مثال (٣, ١) (تسويق):

ترغب إحدى المنشآت الصناعية بعمل حملة إعلانية لمنتجاتها الصناعية، وذلك خلال شهر مايو. وقد خصصت المنشأة مبلغ ٢٠٠٠٠٠ ريال لهذه الحملة على أن تتم تلفزيونياً أثناء نقل مباريات

كرة القدم يومي الخميس والجمعة وإذاعياً في الفترة الصباحية يومياً من السبت إلى الأربعاء (خمسة أيام)، وفي الصحيفة المحلية في عدد يوم الجمعة. فإذا علمت أن:

- الدقيقة الواحدة تلفزيونياً تكلف ١٥٠٠٠ ريال، والدقيقة الواحدة إذاعياً تكلف ٤٠٠٠ ريال والصفحة الكاملة في الجريدة يوم الجمعة تكلف ٣٠٠٠٠ ريال.
- عدد المشاهدين المتوقع أثناء نقل المباريات تلفزيونياً يساوي ٥٠٠٠٠ مشاهد، وعدد المستمعين المتوقع للإذاعة في الفترة الصباحية يساوي ٧٠٠٠ مستمع، وعدد قُرّاء الصحيفة المحلية يوم الجمعة المتوقع يساوي ١٠٠٠٠٠ قارئ.
- عدد الأشخاص المُعرّضين للإعلان في الصحيفة أو الإذاعة أو التلفزيون يتناسب مع حجم الإعلان. (نصف دقيقة تلفزيونية تعني ٢٥٠٠٠ شخص ونصف دقيقة إذاعية تعني ٣٥٠٠ شخص ونصف صفحة في الصحيفة تعني ٥٠٠٠٠ قارئ)
- يجب أن يتم الإعلان في الجريدة بما مجموعه صفحتين على الأقل خلال الشهر.
- عدد أيام الجمعة في شهر مايو ٥ أيام، وعدد أيام الخميس ٥ أيام، وباقي الأيام ٢١ يوماً.
- الحدود القصوى: دقيقة واحدة في اليوم الواحد للإعلان في الإذاعة، ودقيقة واحدة في اليوم الواحد للإعلان في التلفزيون، وصفحة واحدة فقط في اليوم الواحد للإعلان في الصحيفة، كما يمكن أن يكون الإعلان جزءًا من الدقيقة أو الصفحة.
- المنشأة ترغب في تضخيم عدد الأشخاص المُعرّضين للإعلان.(للتبسيط يمكن أن يتعرض الشخص للإعلان أكثر من مرة، ويحسب في كل مرة كشخص جديد)

المطلوب كتابة الصيغة الرياضية لهذه المسألة على شكل برنامج خطي

الحل: الهدف المطلوب تحقيقه في هذه المسألة هو تضخيم أو تكبير (Max) عدد الأشخاص المُعرّضين للإعلان، وحيث إن عدد الأشخاص المُعرّضين للإعلان مرتبط بعدد الدقائق الإعلانية في التلفزيون، وفي الإذاعة، وعدد الصفحات الإعلانية في الجريدة فيمكن التعبير عن دالة الهدف هذه بالشكل التالي:

عدد الأشخاص المُعرّضين للإعلان = (عدد الدقائق الإعلانية في التلفزيون × عدد المشاهدين للمباريات تلفزيونياً) + (عدد الدقائق الإعلانية في الإذاعة × عدد المستمعين للإذاعــة) + (عدد الصفحات الإعلانية يوم الجمعة × عدد قُرّاء الصحيفة يوم الجمعة). وحيث إن المجهول هنا هو عدد الدقائق الإعلانية في التلفزيون والإذاعة، وعدد الصفحات الإعلانية في الصحيفة، وحيث إن عدد الأشخاص المُعرّضين للإعلان يعتمد على تحديد هذه القيم المجهولة، فإن متغيرات القرار هي:

X_1: عدد الدقائق الإعلانية في التلفزيون.

X_2: عدد الدقائق الإعلانية في الإذاعة.

X_3: عدد الصفحات الإعلانية في الجريدة.

و عليه فيمكن التعبير عن دالة الهدف رياضياً كما يلي:

$$\text{Max } z = 50000X_1 + 7000X_2 + 100000X_3$$

أما بالنسبة للقيود فإن أول القيود لهذه المسألة يخص توزيع المبلغ المعد للحملة الإعلانية على متغيرات القرار على أساس أن:

[(تكلفة الدقيقة الواحدة للإعلان التلفزيوني × عدد الدقائق الإعلانية في التلفزيون) + (تكلفة الدقيقة الواحدة للإعلان الإذاعي × عدد الدقائق الإعلانية في الإذاعة) + (تكلفة الصفحة الواحدة للإعلان في الصحيفة × عدد الصفحات الإعلانية في الصحيفة)] أقل أو تساوي المبلغ المعد للحملة الإعلانية. و يمكن تمثيلها رياضياً كالتالي:

$$15000X_1 + 4000X_2 + 30000X_3 \leq 200000$$

و بقية القيود تهتم بأن لا يتجاوز عدد الإعلانات التلفزيونية ١٠ إعلانات؛ لأن عدد أيام الخميس والجمعة لهذا الشهر هو ١٠ أيام، وعدد الإعلانات الإذاعية ٢١ إعلاناً، لأن عدد أيام الشهر عدا الخميس والجمعة هو ٢١ يوماً، وعدد الإعلانات في الصحيفة لا يزيد عن ٥ إعلانات؛ لأن عدد أيام الجمعة لهذا الشهر هو ٥ أيام، ولا يقل عن إعلانين؛ لأن هذا أحد شروط الحملة الإعلانية. يمكن التعبير هذه القيود بالشكل التالي:

$$X_1 \leq 10$$
$$X_2 \leq 21$$
$$X_3 \leq 5$$
$$X_3 \geq 2$$

أخيراً قيد عدم السلبية لعدم إمكانية أن يكون أحد المتغيرات سالباً. الصيغة النهائية لهذه المسألة ستكون على الشكل التالي:

$$\text{Max } z = 50000X_1 + 7000X_2 + 100000X_3$$

Subject To

$$15000X_1 + 4000X_2 + 30000X_3 \leq 200000$$
$$X_1 \leq 10$$
$$X_2 \leq 21$$
$$X_3 \leq 5$$
$$X_3 \geq 2$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال (٤ , ١) (مزيج الإنتاج):

تقوم شركة الرياض الغذائية بإنتاج وجبات غذائية من عدة مكونات. من هذه المكونات E وF اللذان يحتويان على فيتامين A وفيتامين B. وترغب الشركة في معرفة عدد الأونصات من E وF اللازمة في كل وجبة على أساس المحافظة على الحدود الدنيا من الفيتامينات، التي تساوي ٤٨ ملجم من الفيتامين A و١٢ ملجم من الفيتامين B في ظل تخفيض تكلفة الإنتاج. فإذا علمنا أن الأونصة الواحدة من E تعطي ٨ ملجم من الفيتامين A و١ ملجم من الفيتامين B وتكلف ٥ قروش، وأن الأونصة الواحدة من F تعطي ٦ ملجم من الفيتامين A و٢ ملجم من الفيتامين B وتكلف ٤ قروش. فما هي الصيغة الرياضية المناسبة لتخفيض تكاليف الإنتاج؟.

الحـــل: مرةً أخرى، نبدأ بالبحث عن هدف هذه المسألة، وهو تخفيض (Min) تكاليف الإنتاج والمتعلقة بالمكونات E وF، وحيث إن:

تكلفة الإنتاج = (تكلفة الأونصة الواحدة من E × عدد الأونصات من E اللازمة للوجبة الواحدة) + (تكلفة الأونصة الواحدة من F × عدد الأونصات من F اللازمة للوجبة الواحدة).

نلاحظ أن المجهول هنا هو عدد الأونصات من E وF اللازمة للعملية الإنتاجية، ولذلك فإن متغيرات القرار هي:

X_1: عدد الأونصات من E.

X_2: عدد الأونصات من F.

و دالة الهدف يمكن التعبير عنها بالتالي:

$$\text{Min } w = 5X_1 + 4X_2$$

أما القيود فلدينا قيدان أساسيان، الأول يختص بالالتزام بالحد الأدنى من فيتامين A، والآخر بالحد الأدنى من فيتامين B. فالقيد الأول هو:

[(عدد المليجرامات من فيتامين A في الأونصة الواحدة من E × عدد الأونصات من E في الوجبة الواحدة) + (عدد المليجرامات من فيتامين A في الأونصة الواحدة من F × عدد الأونصات من F في الوجبة الواحدة)] يجب ألا تقل (و تعني أكبر من أو تساوي) عن ٤٨ ملجم من الفيتامين A.

و القيد الثاني:

[(عدد المليجرامات من فيتامين B في الأونصة الواحدة من E × عدد الأونصات من E في الوجبة الواحدة) + (عدد المليجرامات من فيتامين B في الأونصة الواحدة من F × عدد الأونصات من F في الوجبة الواحدة)] يجب ألا تقل عن ١٢ ملجم من الفيتامين B.

و يمكن التعبير عنهما بالشكل التالي:

$$8X_1 + 6X_2 \geq 48$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 12$$

أخيراً فإن الصيغة الرياضية لهذه المسألة بعد إضافة **قيد عدم السلبية** سيكون كالتالي:

$$\text{Min } w = 5X_1 + 4X_2$$
Subject To
$$8X_1 + 6X_2 \geq 48$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 12$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (٥ , ١) (مزيج الإنتاج):

شركة كيميائية تقوم بتصنيع ٣ منتجات مصنوعة من مادتين كيميائيتين A وB. فإذا علمنا أن المتاح حالياً ٢٨ جالوناً من المادة A و٢٥ جالوناً من المادة B، وأن الحد الأدنى لطلبات الزبائن من المنتجات الثلاثة على التوالي ٢٠، ١٠، ١٤ جالوناً. وإذا كان الجالون من المادة A يحتوي على ١ , ٠ من المادة S و٠٥ , ٠ من المادة T والجالون من المادة B يحتوي على ٢ , ٠ من المادة S و٠٤ , ٠ من المادة T. وكان من اللازم أن يحتوي الجالون الواحد من المنتج الأول على ١٥ , ٠ على الأقل من المادة S والجالون الواحد من المنتج الثاني على ٠٤٥ , ٠ على الأكثر من المادة T، وكذلك فإن الكمية المستخدمة من المادة A لابد أن تكون على الأقل ثلاثة أمثال الكمية المستخدمة من المادة B لإنتاج المنتج الثالث. المطلوب كتابة الصيغة الرياضية على شكل برنامج خطي لتخفيض تكلفة إنتاج المنتجات الثلاثة بمعرفة أن تكلفة الجالون من المادة A تساوي ٥٠٠ ريال وتكلفة الجالون من المادة B تساوي ٦٠٠ ريال.

الحل: الهدف في هذه المسألة هو تخفيض (Min) تكاليف إنتاج المنتجات الثلاثة والناتجة من خلط المادتين الكيميائيتين A وB وحيث إن:

تكلفة الإنتاج = مجموع (تكلفة الجالون الواحد من المادة الكيميائية A × عدد الجالونات اللازمة من المادة A لإنتاج المنتج j) + مجموع (تكلفة الجالون الواحد من المادة الكيميائية B × عدد الجالونات اللازمة من المادة B لإنتاج المنتج j).

$\sum_{i}\sum_{j} CiXij$ (i=A,B و j = 1,2,3 حيث)

نلاحظ أن المجهول هنا هو عدد الجالونات اللازمة من المادة A والمادة B لإنتاج المنتج j، ولذلك فإن متغيرات القرار هي:

X_{A1}: عدد الجالونات اللازمة من المادة A لإنتاج المنتج 1.

X_{A2}: عدد الجالونات اللازمة من المادة A لإنتاج المنتج 2.

X_{A3}: عدد الجالونات اللازمة من المادة A لإنتاج المنتج 3.

X_{B1}: عدد الجالونات اللازمة من المادة B لإنتاج المنتج 1 .

X_{B2}: عدد الجالونات اللازمة من المادة B لإنتاج المنتج 2 .

X_{B3}: عدد الجالونات اللازمة من المادة B لإنتاج المنتج 3 .

ودالة الهدف يمكن التعبير عنها بالتالي:

$$\text{Min } w = 500X_{A1} + 500X_{A2} + 500X_{A3} + 600X_{B1} + 600X_{B2} + 600X_{B3}$$

أما القيود فلدينا قيدان يخصان الكميات القصوى والمتاحة حالياً من المادتين الكيميائيتين، وهي ٢٨ جالوناً من A و٢٥ جالوناً من B، وهذا يعني أن المنتجات الثلاثة لا يمكن أن تستهلك أكثر من ٢٨ جالوناً من A و٢٥ جالوناً من B. ويمكن التعبير عنهما رياضياً بالتالي:

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \le 28$$
$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \le 25$$

كذلك لدينا قيود تخص الالتزام بطلبات الزبائن، وهي أن الكمية المنتجة من المنتج الأول يجب ألا تقل عن ٢٠ جالوناً ومن المنتج الثاني عن ١٠ جالونات، ومن المنتج الثالث عن ١٤ جالوناً، ويمكن التعبير عنها رياضياً بالتالي:

$$X_{A1} + X_{B1} \ge 20$$
$$X_{A2} + X_{B2} \ge 10$$
$$X_{A3} + X_{B3} \ge 14$$

أيضاً هناك قيد يخص الالتزام بالنسبة الدنيا من المادة S في الجالون الواحد من المنتج الأول التي يمكن تحديدها كالتالي:

$$0.1X_{A1} + 0.2X_{B1} \ge 0.15(X_{A1} + X_{B1}) \quad ======\rightarrow -0.05X_{A1} + 0.05X_{B1} \ge 0$$

كذلك يوجد لدينا قيد يخص الالتزام بالنسبة العليا من المادة T في الجالون الواحد من المنتج الثاني التي يمكن تحديدها كالتالي:

$$0.05X_{A2} + 0.04X_{B2} \le 0.045(X_{A2} + X_{B2}) \quad ======\Rightarrow \quad 0.005X_{A2} - 0.005X_{B2} \le 0$$

أما القيد الأخير في هذه المسألة فيخص الخليط اللازم من المادتين A وB لإنتاج المنتج الثالث والذي يشترط أن تكون نسبة المادة A إلى المادة B ٣ إلى ١ على الأقل، ويمكن إيجادها كالتالي:

$$X_{A3} \ge 3X_{B3} \quad ======\Rightarrow \quad X_{A3} - 3X_{B3} \ge 0$$

أخيراً فإن الصيغة الرياضية لهذه المسألة بعد إضافة قيد عدم السلبية سيكون كالتالي:

$$\text{Min } w = 500X_{A1} + 500X_{A2} + 500X_{A3} + 600X_{B1} + 600X_{B2} + 600X_{B3}$$

Subject To:

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \le 28$$
$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \le 25$$
$$X_{A1} + X_{B1} \ge 20$$
$$X_{A2} + X_{B2} \ge 10$$
$$X_{A3} + X_{B3} \ge 14$$
$$0.05X_{A1} - 0.05X_{B1} \le 0$$
$$0.005X_{A2} - 0.005X_{B2} \le 0$$
$$X_{A3} - 3X_{B2} \ge 0$$
$$X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3} \ge 0$$

مثال (٦ , ١) (محاسبة):

مؤسسة احمد الصناعية تقوم بتصنيع ثلاثة أنواع من الأجهزة الإلكترونية. في بداية شهر ١/ ١٤٣٦هـ كان لدى المصنع ما يكفي من مخزون المواد الخام لصناعة ١٠٠ وحدة كحد أقصى من كل نوع. يوضح الجدول التالي سعر البيع، وتكلفة الإنتاج لكل وحدة.

البيان للوحدة	النوع الأول	النوع الثاني	النوع الثالث
سعر البيع	300	250	180
تكلفة العمالة	110	100	70
تكلفة المواد الخام	120	100	70
صافي الربح	70	50	40

الميزانية العمومية في بداية شهر ١/ ١٤٣٦هـ تظهر بالشكل التالي:

	الأصول	الخصوم
النقدية	١٠٠٠٠٠	
المدينون	٣١٠٠٠	
مخزون المواد الخام	٢٩٠٠٠	
الدائنون		٨٠٠٠٠

فإذا علمنا أن:

- جميع المبيعات في شهر ١ ستكون بالأجل ولن تسدد إلا في شهر ٤/ ١٤٣٦هـ، وجميع ما ينتج سيتم بيعه.
- مستحقات العمالة تسدد نقداً في نهاية الشهر.
- سيتمكن المصنع من استرداد مبلغ ١٠٠٠٠ ريال نقداً من المدينين خلال شهر ١/ ١٤٣٦هـ.
- سيتم سداد مبلغ ٥٠٠٠ ريال نقداً للدائنين خلال شهر ١/ ١٤٣٦هـ.
- سيتم شراء مواد خام بالأجل ستصل في نهاية شهر ١ بقيمة ١٠٠٠٠ ريال، وسيتم سدادها في شهر ٣/ ١٤٣٦هـ.

ترغب المؤسسة في التالي:

- أن تكون قيمة النقدية في نهاية شهر ١/ ١٤٣٦هـ لا تقل عن ٦٠٠٠٠ ريال.
- أن تكون نسبة الأصول إلى الخصوم في نهاية شهر ١/ ١٤٣٦هـ لا تقل عن ٢.
- أن تكون نسبة المدينين إلى الدائنين في نهاية شهر ١/ ١٤٣٦هـ لا تقل ٠,٥.
- تعظيم صافي الربح من بيع الأنواع الثلاثة خلال شهر ١/ ١٤٣٦هـ.

الحل: **الهدف** في هذه المسألة هو تعظيم (Max) صافي الربح من بيع الأنواع الثلاثة من المنتجات، ومجموع صافي الربح يمكن التعبير عنه بالتالي:

صافي الربح الإجمالي = (صافي ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول × عدد الوحدات المطلوب بيعها من النوع الأول) + (صافي ربح الوحدة الواحدة من النوع الثاني × عدد الوحدات المطلوب بيعها من النوع الثاني) + (صافي ربح الوحدة الواحدة من النوع الثالث × عدد الوحدات المطلوب بيعها من النوع الثالث).

المجهول هنا في صافي الربح الإجمالي هو عدد الوحدات المباعة من كل نوع ، وعليه فإن متغيرات القرار:

X_1: عدد الوحدات المطلوب بيعها من النوع الأول.

X_2: عدد الوحدات المطلوب بيعها من النوع الثاني.

X_3: عدد الوحدات المطلوب بيعها من النوع الثالث.

بناءً على هذا فإن دالة الهدف يمكن التعبير عنها بالتالي:

$$\text{Max } z = 70X_1 + 50X_2 + 40X_3$$

أما القيود، فإن هذه المسألة تتكون من شروط أساسية:

١- أن عدد الوحدات المنتجة لا تتجاوز ١٠٠ وحدة من كل نوع لمحدودية المواد الخام خلال الشهر.

٢- أن لا تقل النقدية في نهاية الشهر عن ٦٠٠٠٠ ريال.

٣- أن تكون نسبة الأصول إلى الخصوم لا تقل عن ٢.

٤- أن تكون نسبة المدينين إلى الدائنين لا تقل عن ٠,٥ .

للتعبير عن الشرط الأول يمكن كتابة القيود التالية:

$$X_1 \leq 100$$
$$X_2 \leq 100$$
$$X_3 \leq 100$$

للتعبير عن الشرط الثاني والخاص بقيمة النقدية في نهاية الشهر، فلابد من تحديد قيمة النقدية في نهاية الشهر والتي يمكن حسابها كما يلي:

قيمة النقدية في نهاية الشهر = قيمة النقدية في بداية الشهر + المسترد من المدينين – المسدد للدائنين – المبالغ المدفوعة للعمالة خلال الشهر.

مجموع الأصول تساوي:

$(105000 - 110X_1 - 100X_2 - 70X_3) + (21000 + 300X_1 + 250X_2 + 180X_3) + (39000 - 120X_1 - 100X_2 - 70X_3) = 165000 + 70X_1 + 50X_2 + 40X_3$

ثانياً. الخصوم = الدائنون في بداية الشهر – المدفوعات للدائنين خلال الشهر + المشتريات بالأجل،

الخصوم = $80000 - 5000 + 10000 = 85000$

إذاً نسبة الأصول إلى الخصوم يمكن التعبير عنها بالتالي:

$165000 + 70X_1 + 50X_2 + 40X_3 \geq 2(85000) \quad ===\rightarrow 70X_1 + 50X_2 + 40X_3 \geq 5000$

الشرط الرابع يخص نسبة المدينين إلى الدائنين، وقد سبق تحديد قيمة كلٍ منهما في نهاية الشهر، وبالتالي يمكن تحديد هذه النسبة كما يلي:

$21000 + 300X_1 + 250X_2 + 180X_3 \geq 0.5(85000) \rightarrow 300X_1 + 250X_2 + 180X_3 \geq 21500$

الصيغة الرياضية لهذه المسألة كالتالي:

Max $z = 70X_1 + 50X_2 + 40X_3$

Subject To:

$$X_1 \leq 100$$
$$X_2 \leq 100$$
$$X_3 \leq 100$$
$$110X_1 + 100X_2 + 70X_3 \leq 45000$$
$$70X_1 + 50X_2 + 40X_3 \geq 5000$$
$$300X_1 + 250X_2 + 180X_3 \geq 21500$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال (١ , ٧) (جدولة):

ترغب جامعة الملك سعود في جدولة عمل حراس الأمن لديها بحيث يعمل حراس الأمن ١٢ ساعة يومياً، وعلى ٤ فترات في اليوم ابتداءً من ١٢ صباحاً إلى ٦ صباحاً، ثم من ٦ صباحاً إلى ١٢ مساءً، ثم من ١٢ مساءً إلى ٦ مساءً، وأخيراً من ٦ مساءً إلى ١٢ صباحاً، على ألا يقل عدد الحراس في كل فترة عن ٦، ١٥، ١٠، ٩ حراس أمن. المطلوب إيجاد العدد الأمثل بحيث يكون أقل ما يمكن.

الحــل: لحل هذه المسألة لابد من تعريف متغيرات القرار، والتي يمكن استنتاجها من الهدف لهذه المسألة. الهدف لهذه المسألة هو تخفيض (Min) عدد حراس الأمن خلال اليوم، ولذلك فإن متغيرات القرار هي:

Xi :عدد حراس الأمن في المجموعة i. حيث (i=1,2,...,4)

دالة الهدف يمكن التعبير عنها بالتالي:

$$\text{Min } w = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

وحيث إن حارس الأمن في المجموعة الأولى سيبدأ عمله الثانية عشرة صباحاً، ويستمر إلى نهاية الفترة الثانية التي تنتهي الساعة الثانية عشرة ظهراً حتى يُتِمَ ساعات عمله المطلوبة يومياً. وهذا الأمر نفسه ينطبق على حراس الأمن في المجموعات الأخرى. يبين الجدول التالي الشكل الذي ستصاغ على أساسه القيود.

المجموعة/ الفترة	12ص – 6ص	6ص – 12م	12م – 6م	6م – 12ص
الأولى	X_1	X_1		
الثانية		X_2	X_2	
الثالثة			X_3	X_3
الرابعة	X_4			X_4
العدد المطلوب	6	15	10	9

يمثل القيد الأول عدد حراس الأمن في الفترة الأولى من ١٢ صباحاً إلى ٦ صباحاً، والذي يجب ألا يقل عن ٦ حراس أمن، وتتكوّن هذه المجموعة من الحراس الذين سيبدأون عملهم الساعة ١٢ صباحاً، والذين يمكن تعريفهم بأنهم X_1، ومن الحراس الذين سيبدأون عملهم الساعة ٦ مساءً، والذين يمكن تعريفهم بأنهم X_4 حيث نهاية عملهم ستكون الساعة ٦ صباحاً:

$$X_1 + X_4 \geq 6$$

القيود الأخرى ستأخذ نفس النظام:

$$X_1 + X2 \geq 15$$
$$X_2 + X_3 \geq 10$$
$$X_3 + X_4 \geq 9$$

أخيراً قيد عدم السلبية:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \text{ and Integers}$$

لا بـد من ملاحظة أننا أضفنا عبارة (and Integers) لقيد عدم السلبية، والذي يعني أن قيم المتغيرات يجب أن تأخذ قيماً تمثل أعداداً صحيحة. (سيتم الحديث عن هذا الموضوع لاحقاً).

الصيغة الرياضية لهذه المسألة بشكلها النهائي كالتالي:

Min $w = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
Subject To:

$X_1 + X_4 \geq 6$
$X_1 + X2 \geq 15$
$X_2 + X_3 \geq 10$
$X_3 + X_4 \geq 9$
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ and Integers

تمارين محلولة

السؤال الأول: تعتزم إدارة أحد المصانع المختص بإنتاج الأثاث تصنيع ثلاثة نماذج من الطاولات A, B, C. المدة الزمنية اللازمة لكل مرحلة من مراحل الإنتاج بالساعة (قص الخشب، والتركيب، والصباغة)، والربح للوحدة بالريالات موضحة في الجدول التالي. النموذج B يمكن أن يباع مصبوغاً، أو غير مصبوغ لكن يجب ألا يقل مجموع المنتج من النموذج B المصبوغ، وغير المصبوغ عن ضعف المنتج من النموذج A. المطلوب كتابة الصيغة الرياضية على شكل برنامج خطي لتكبير الربح من إنتاج هذه النماذج.

النموذج	القص	التركيب	الصباغة	الربح للوحدة
A	1	2	4	35
B مصبوغ	2	4	4	40
B غير مصبوغ	2	4	0	20
C	3	7	0	50
الحد الأقصى	200	300	150	

الحـــــل:

X_A: عدد الوحدات المنتجة من النموذج A .

X_{B1}: عدد الوحدات المنتجة من النموذج B المصبوغ .

X_{B2}: عدد الوحدات المنتجة من النموذج B غير المصبوغ .

X_C: عدد الوحدات المنتجة من النموذج C .

$$\text{Max } z = 35X_A + 40X_{B1} + 20X_{B2} + 50X_C$$

s.t.

$$X_A + 2X_{B1} + 2X_{B2} + 3X_C \le 200$$
$$2X_A + 4X_{B1} + 4X_{B2} + 7X_C \le 300$$
$$4X_A + 4X_{B1} + 5X_C \le 150$$
$$X_{B1} + X_{B2} - 2X_A \ge 0$$
$$X_A, X_{B1}, X_{B2}, X_C \ge 0$$

السؤال الثاني: مستثمر لديه مبلغ ٣,٠٠٠,٠٠٠ ريال يريد استثمارها في شراء بيوت صغيرة، أراضي، وأسهم في إحدى الشركات على أمل أن يستثمر في المشروع أو المشروعات التي ستزيد من العائد المتوقع في نهاية العام. فإذا علمنا العوائد والحدود القصوى من الاستثمار

والموضحة في الجدول التالي، فما هي الصيغة الرياضية المناسبة لحل هذه المسألة؟

المشروع	التكلفة للوحدة	العائد المتوقع في نهاية العام للوحدة	الحدود القصوى
البيوت الصغيرة	450000	50000	5
الأمتار من الأراضي	150	18	12000
الأسهم	200	25	10000

الحل:

X_1: عدد البيوت الصغيرة المطلوب شراؤها.

X_2: عدد الأمتار من الأراضي المطلوب شراؤها.

X_3: عدد الأسهم المطلوب شراؤها.

Max $z = 50000X_1 + 18X_2 + 25X_3$

Subject To:

$$450000X_1 + 150X_2 + 200X_3 \leq 3000000$$
$$X_1 \leq 5$$
$$X_2 \leq 12000$$
$$X_3 \leq 10000$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

السؤال الثالث: تعمل شركة صناعية في تصنيع ثلاثة أنواع من المنتجات أ وب وج. يبين الجدول التالي سعر البيع، وبيانات العملية الإنتاجية للوحدة. فإذا كانت الشركة قد التزمت بتوريد ٥ وحدات من المنتج الأول و١٠ وحدات من المنتج الثاني لشركة أخرى بناءً على اتفاقية موقعة بينهما، وكانت ترغب في ألا يقل الإنتاج من المنتج الأول عن ضعف الإنتاج من المنتج الثالث، وأن يكون مجموع الإنتاج من المنتج من المنتج الأول، والثاني يساوي ثلاثة أضعاف الإنتاج من المنتج الثالث. اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي لتكبير الإيراد بافتراض أن كل ما ينتج سيتم بيعه.

البيان	المنتج أ	المنتج ب	المنتج ج	الحد الأقصى
سعر البيع	50	70	80	
ساعات العمل	2	5	6	800
المواد الخام	3	4	4	450
ساعات الصيانة	1	2	3,5	400

الحل:

X_1: عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج أ

X_2: عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج ب

X_3: عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج ج

$$\text{Max } z = 50X_1 + 70X_2 + 80X_3$$

S.T.

$$\begin{aligned}
&2X_1 + 5X_2 + 6X_3 \leq 800\\
&2X_1 + 4X_2 + 4X_3 \leq 450\\
&X_1 + 2X_2 + 3.5X_3 \leq 400\\
&X_1 \geq 5\\
&X_2 \geq 10\\
&X_1 - 2X_3 \geq 0\\
&X_1 + X_2 - 3X_3 = 0\\
&X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}$$

تماريــــن

السؤال الأول: تهتم مخابز الريان الجديدة بخبز نوعين من الفطائر، فطائر بالكريمة، وفطائر بالفواكه. كل صندوق من فطائر الكريمة (الصندوق ١٢ فطيرة) تحقق ربحاً قدره ١٥ ريالاً، وتحتاج إلى ١٢ رطلاً من الدقيق، و٥٠ بيضة، و٥ أرطال من السكر. كل صندوق من فطائر الفواكه يحقق ربحاً قدره ٢٥ ريالاً، وتحتاج إلى ١٢ رطلاً من الدقيق، و٤٠ بيضة، و١٠ أرطال من السكر، و١٥ رطلاً من خليط الفواكه. فإذا علمت أن المخبز لديه في أحد الأيام ١٥٠ رطلاً من الدقيق، و٥٠٠ بيضة، و٩٠ رطلاً من السكر، و١٢٠ رطلاً من خليط الفواكه، فاكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي لتعظيم الأرباح بمعلومية أن عدد صناديق فطائر الكريمة يجب أن تزيد عن صناديق فطائر الفواكه بصندوقين على الأقل.

السؤال الثاني: تقوم إحدى الشركات الصناعية بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات A وB وC، فإذا علمت أن الوحدة الواحدة من المنتج الأول تحتاج إلى ٣ ساعات عمل، و٤٠ رطلاً من المواد الخام والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج إلى ساعتين عمل و٣٠ رطلاً من المواد الخام والوحدة الواحدة من المنتج الثالث تحتاج إلى ٣,٥ ساعة عمل، و٤٥ رطلاً من المواد الخام، فإذا علمت أن المتاح من ساعات العمل، ومن المواد الخام يومياً يساوي ٧٢٠ ساعة عمل، و٧٥٠٠ رطل من المواد الخام. فإذا قدمت الإدارة المالية المعلومات التالية لسعر البيع، وتكاليف الإنتاج للوحدة الواحدة من المنتجات الثلاثة كما في الجدول التالي. المطلوب كتابة الصيغة الرياضية لهذه المسألة على شكل برنامج خطي لتعظيم صافي الأرباح بمعلومية أن المؤسسة ترغب في أن لا تتجاوز الكمية المنتجة من المنتج الأول عن ١٠ وحدات، وأن لا تقل الكمية المنتجة من المنتج الثاني عن ١٥ وحدة، وأن لا تزيد الكمية المنتجة من المنتج الأول والثاني عن الكمية المنتجة من المنتج الثالث.

المنتج	A	B	C
سعر البيع للوحدة	120	100	130
تكلفة الإنتاج للوحدة	80	65	95

السؤال الثالث: محمد لديه مصنع ينتج مواد كيميائية A, B, C تباع بالكيلو على أساس أن سعر الكيلو للمواد على التوالي ١٥٠٠، ١٨٠٠، ٢٠٠٠ ريالاً. فإذا علمت أن الكيلو من المادة A يحتاج إلى ٤ ساعات للتركيب الكيميائي، و٦٠٠ ريال مواد أولية، و٣ ساعات للاختبار والكيلو من المادة B يحتاج إلى ٦ ساعات للتركيب الكيميائي، و٨٠٠ ريال مواد أولية، و٤ ساعات للاختبار

والكيلو من المادة C يحتاج إلى ٧ ساعات للتركيب الكيميائي، و٩٠٠ ريال مواد أولية، و٥ ساعات للاختبار، وأن محمد يرغب في تكبير قيمة المبيعات بمعلومية أن كل ما ينتجه سيتم بيعه. وبافتراض أن المواد الأولية المتاحة وقيمتها ١٢٠٠٠ ريال سيتم تخصيص نصفها على الأقل للمادة الكيميائية A، وأن المتاح من ساعات التركيب الكيميائي، وساعات الاختبار على التوالي ١٥٠ و١٢٠ ساعة. المطلوب كتابة الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي.

السؤال الرابع: تعمل شركة صناعية في تصنيع ثلاثة أنواع من المنتجات أ وب وج. يبين الجدول التالي سعر البيع، وبيانات العملية الإنتاجية للوحدة. فإذا كانت الشركة قد التزمت بتوريد ٥ وحدات من المنتج الأول و١٠ وحدات من المنتج الثاني لشركة أخرى بناءً على اتفاقية موقعة بينهما، وكانت ترغب في ألا يقل الإنتاج من المنتج الأول عن ضعف الإنتاج من المنتج الثالث، وأن يكون مجموع الإنتاج من المنتج من المنتج الأول والثاني يساوي ثلاثة أضعاف الإنتاج من المنتج الثالث. اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي لتكبير الإيراد بافتراض أن كل ما ينتج سيتم بيعه.

البيان	المنتج أ	المنتج ب	المنتج ج	الحد الأقصى
سعر البيع	50	70	80	
ساعات العمل	3	5	6	800
المواد الخام	2	3	4	450
ساعات الصيانة	1	2	1,5	400

السؤال الخامس: تقوم شركة الجوف المعدنية بتصنيع نوع من المعادن بحيث يشمل المواصفات التالية:

- مقاوم للجاذبية بنسبة ٩٨٪ على الأكثر.
- كروم بنسبة ٨٪ على الأقل.
- درجة ذوبان لا تقل عن ٤٥٠ درجة مئوية.

المواد الخام التالية A, B, C والتي تحمل المواصفات (كما في الجدول) يمكن أن تستخدم لتصنيع المعدن.

المواصفات	مواصفات المواد الخام		
	A	B	C
مقاومة الجاذبية	0.92	0.97	1.04
كروم	7%	13%	16%
درجة الذوبان	440	490	480
التكلفة للطن	190	280	140

اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي لإيجاد نسب استخدام المواد الخام في تصنيع المعدن في ظل تخفيض التكلفة الكلية للإنتاج.

السؤال السادس: يرغب مدير أحد المصانع بتكبير صافي الربح لإنتاج خمسة عشر منتجاً لديه، فإذا علمت أن العائد من بيع كل منتج يساوي Rj، وتكلفة إنتاج كل منتج يساوي Cj حيث j=1,2,3,…,n وn=15. وإذا علمت أن تكلفة الإنتاج يجب ألا تتجاوز C ريالاً، وأن الكمية المنتجة من المنتجات ١ إلى ٥ يجب ألا تقل عن 150% من الكمية المنتجة من باقي المنتجات، كما أن تكلفة المنتجات من ٦ إلى ١٠ يجب أن لا تزيد عن 10% من التكلفة الكلية للإنتاج. اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي، وابدأ بتعريف متغيرات القرار.

السؤال السابع: تقوم شركة الرياض للجلود بتصنيع أربعة أنواع من حقائب رجال الأعمال، وتستلزم عملية إنتاج الحقيبة إلى كمية من المواد الخام الممثلة بالجلود، وساعات عمل لحياكة هذه الجلود. يمثل الجدول التالي المواد الخام بالقدم المربع، وساعات العمل اللازمة لإنتاج كل نوع، وسعر البيع للوحدة الواحدة من كل نوع. حالياً، تملك الشركة ٥٠٠٠ قدم مربع من الجلود و٦٠٠٠ ساعة عمل، ولتلبية طلبات العملاء فلابد من إنتاج ١١٠٠ حقيبة منها على الأقل ٣٠٠ من النوع الثالث، وعلى ألا يقل مجموع ما ينتج من النوع الأول عن ضعف مجموع ما ينتج من النوع الثاني. المطلوب حل هذه المسالة على شكل برنامج خطي لتعظيم حجم المبيعات.

	النوع **1**	النوع **2**	النوع **3**	النوع **4**
مواد خام للوحدة	2	3	5	6
ساعات العمل للوحدة	3	4	7	9
سعر البيع للوحدة	250	300	400	450

المراجع
References

Moore J.F., and Weatherford L.R.: Decision Modeling With Microsoft Excel, 6th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2001.

Saul I. Gass: "The Life and Times of the Father of Linear Programming", OR/MS Today, August 2005.

Taylor III, Bernard: Introduction to Management Science, 10/E ,Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2010.

Vohra N.D.: Quantitative Techniques In Management, 2nd reprint, Tata McGraw Hill, New Delhi, India, 1992.

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

الفصل الثالث

الحل باستخدام الرسم البياني
Graphical Solution

يمكن حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني إذا كان عدد المتغيرات اثنين أو أقل؛ وذلك لإمكانية تصور الشكل البياني. ولكن إذا زاد عدد المتغيرات عن اثنين، فإن ذلك يعني الحاجة إلى زيادة عدد الأبعاد في الشكل البياني (حيث إن عدد الأبعاد في الشكل البياني يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الخطي)، مما يجعله صعب التخيل، بل ومستحيل في أغلب الأوقات [Taylor III, 2010]، ولذلك نستخدم طريقة السمبلكس في هذه الحالة، وسنتحدث عنها بالتفصيل في الفصل القادم. سنقوم في هذا الفصل بدراسة حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني حيث إن عدد المتغيرات لا يزيد عن اثنين.

الرسم البياني:

ذكرنا سابقاً أن العلاقات في البرنامج الخطي هي علاقات خطية لكلٍ من القيود ودالة الهدف، ولذلك فإنه يمكن رسم هذه العلاقات بيانياً. لنأخذ العلاقة التالية:

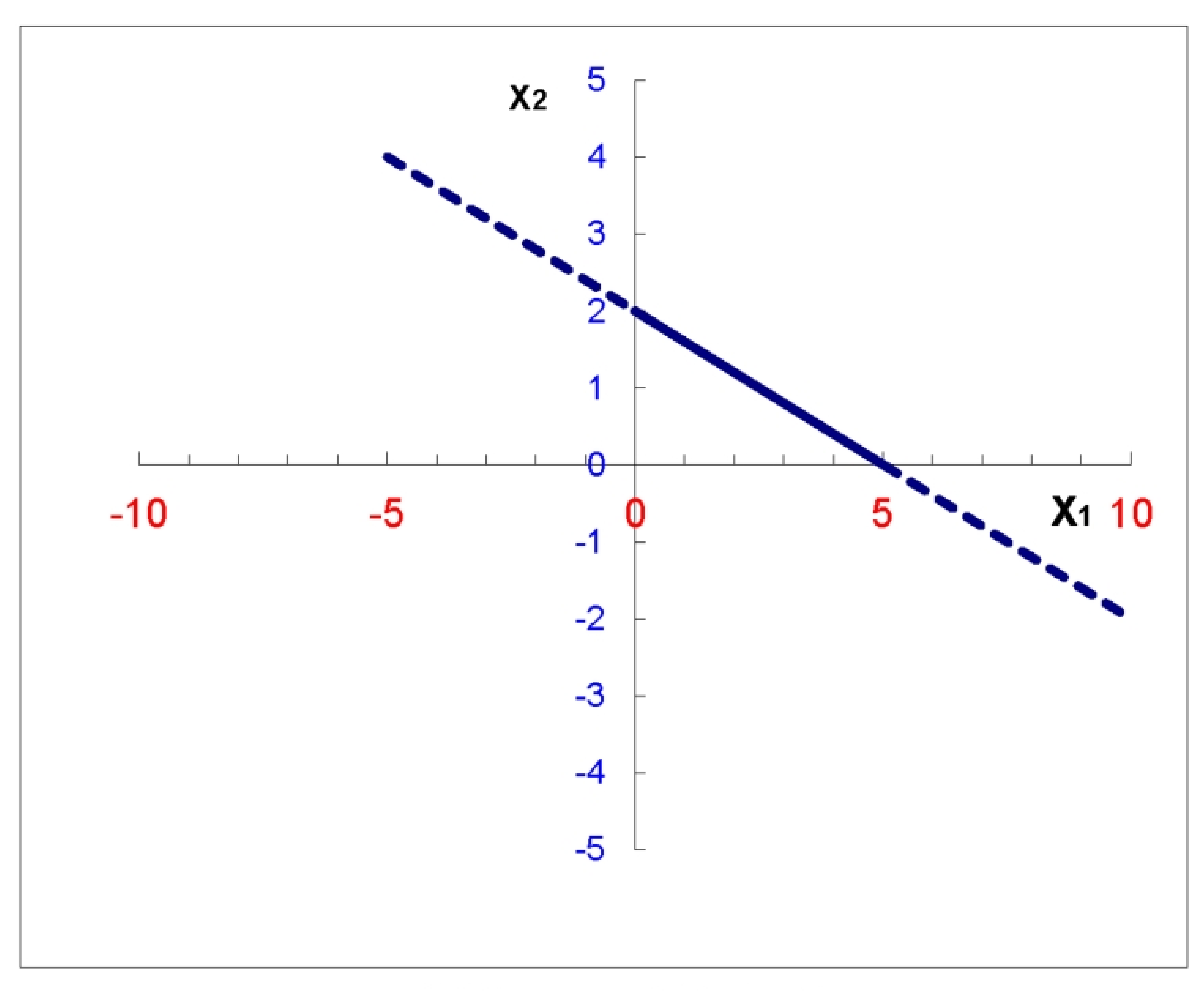
$$2X_1 + 5X_2 = 10$$

يمكن لنا رسم هذه المعادلة الخطية كالتالي:

١ -نفرض أن $X_1 = 0$ ثم نحل المعادلة $5X_2 = 10$ وبالتالي فإن $X_2 = 2$.

٢ -نفرض أن $X_2 = 0$ ثم نحل المعادلة $2X_1 = 10$ وبالتالي فإن $X_1 = 5$.

٣-نصل بين النقطتين (5,0) و(0,2) بخط مستقيم ثم نمد هذا الخط قبل النقطتين وبعدها، ونكون قد تمكّنا من رسم الخط المستقيم لهذه المعادلة كما في الشكل (١ , ٣).



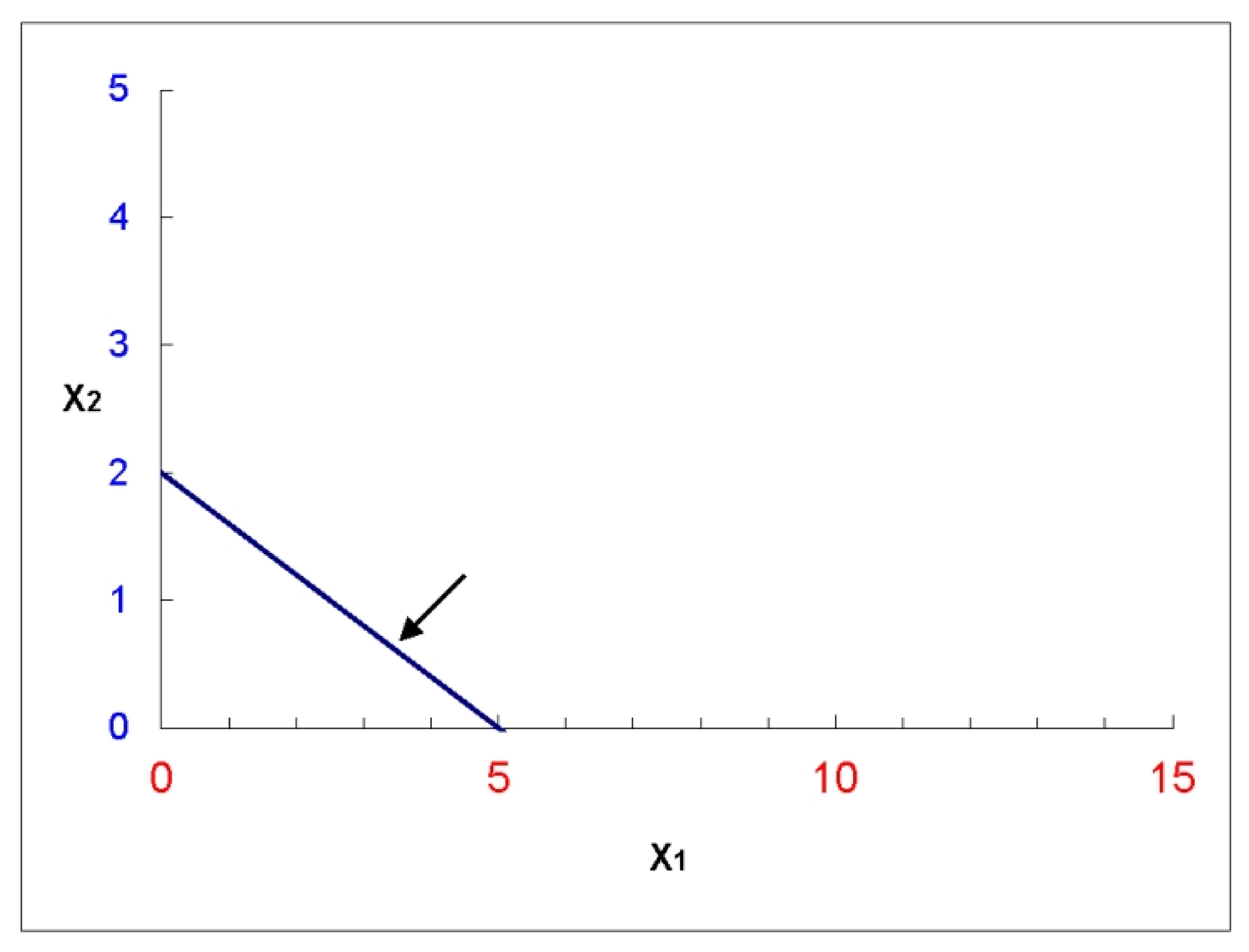
الشكل رقم (١ , ٣). يوضح رسم الخط المستقيم.

ملاحظة: يتم استخدام الرموز اللاتينية في هذا الكتاب؛ لأن جميع أو غالبية البرامج الحاسوبية Softwares تستخدم هذه الرموز (حيث إننا سنستخدم بعضاً من هذه البرامج كما سنرى لاحقاً)، ولذلك فالتعبير عن النقاط في الرسم البياني سيلتزم بهذا الأمر. كمثال على ذلك: النقطة (5,2) تعني تقاطع القيمة ٥ على المحور الأفقي والقيمة ٢ على المحور العمودي، ولذلك تُقرأ من اليسار إلى اليمين.

لرسم المتراجحة $2X_1 + 5X_2 \leq 10$ ، ولتحديد اتجاهها نقوم بالتالي:

- نحول المتراجحة إلى معادلة كالتالي: $2X_1 + 5X_2 = 10$.
- نرسم الخط المستقيم والواضح كما في الشكل السابق.

- نختار نقطة عشوائية لا تقع على الخط المستقيم ولتكن (0,0).
- نقيم الجانب الأيسر في المعادلة باستخدام قيم المتغيرات في النقطة العشوائية (0,0) ونحصل على التالي: $2(0) + 5(0) = 0$
- حيث إن قيمة الجانب الأيسر بعد التعويض (0) أصغر من الجانب الأيمن (10)؛ ويتوافق مع اتجاه المتراجحة (≤) فإن اتجاه الخط المستقيم سيكون باتجاه النقطة العشوائية (إلى اليسار)، كما في الشكل (٢ , ٣)، وإن لم يتوافق فيكون بالاتجاه المعاكس (إلى اليمين).



الشكل رقم (٢ , ٣). يوضح اتجاه الخط المستقيم.

سنبدأ إيضاح حل مسائل البرمجة الخطية بشكل متكامل في المثال التالي (المسألة ١ , ٣):

$$\text{Max } z = 15X + 20Y$$

S.T.

$$6X + 5Y \geq 30$$
$$2X \leq 16$$
$$3X - 3Y \leq 6$$
$$8X - 6Y \geq -24$$
$$X, Y \geq 0$$

لحل هذه المسألة بيانياً نقوم بالتالي:

لرسم القيد الأول: نطبق الطريقة السابقة ونوضحها الآن باختصار أكثر:

نحول القيد إلى معادلة: $6X + 5Y = 30$

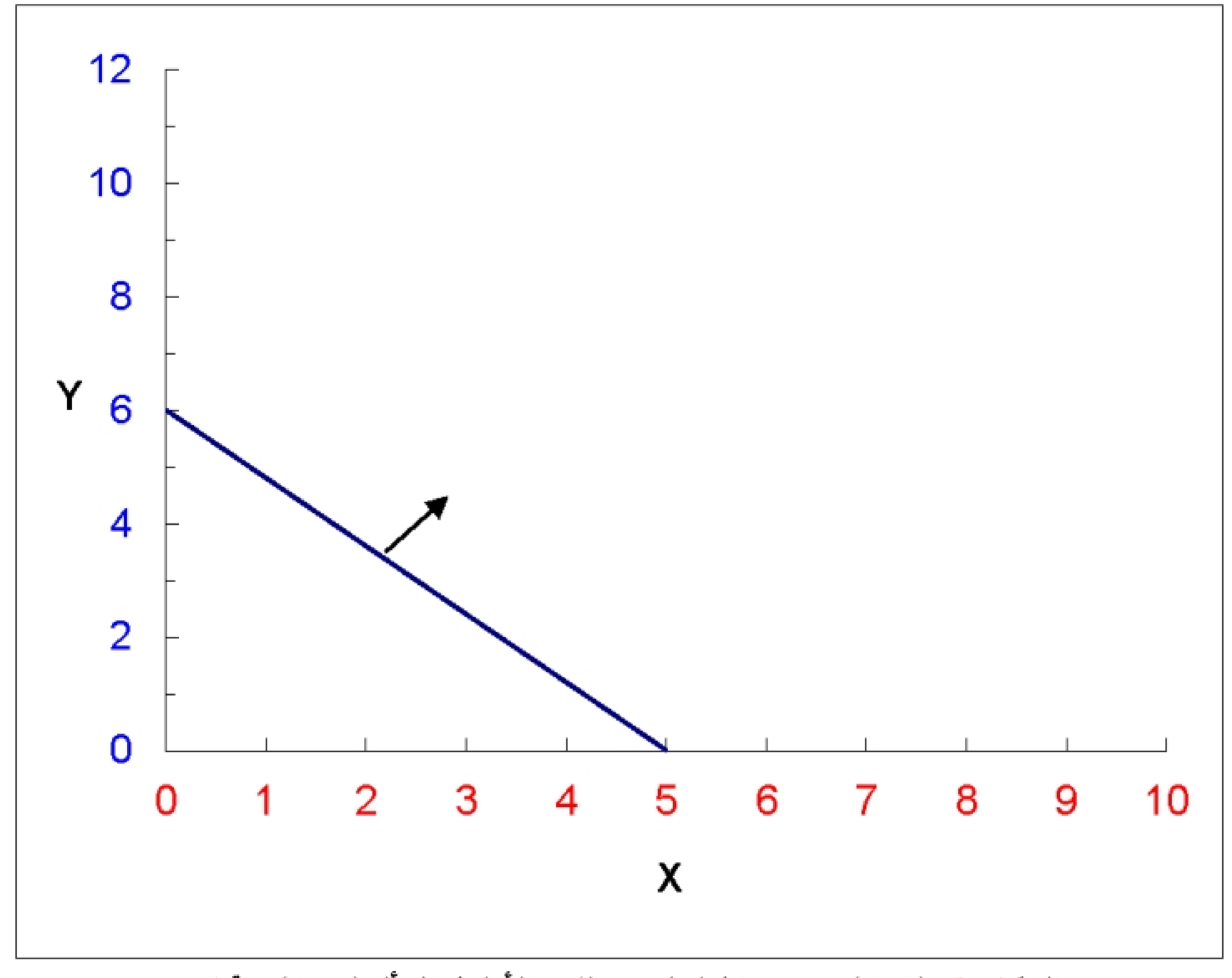
إذا كانت Y=0 فإن X=5 وإذا كانت X=0 فإن Y=6

نعوض لقيم X,Y كالتالي:

X	Y
5	0
0	6

نرسم الخط المستقيم كما هو موضح في الشكل(٣ , ٣).

باستخدام قاعدة تحديد اتجاه الخط المستقيم كما وضحناه في القاعدة السابقة نجد أن اتجاه الخط سيكون إلى اليمين. ونلاحظ أيضاً أن الخط المستقيم يقع في المنطقة الموجبة لكل من X و Y بسبب قيد عدم السلبية.



الشكل رقم (٣ , ٣). يوضح الخط المستقيم للقيد الأول في المسألة (١ , ٣) واتجاهه.

لرسم القيد الثاني:

نحول القيد إلى معادلة: $2X = 16$

X	Y
8	10
8	0
8	-10

وحيث إن Y غير موجودة في المعادلة، فإن قيمة X لا تُحدد بقيمة Y ، فمهما كانت قيمة Y ، فإن قيمة X لا تتغير، ويتم إيجادها بحل المعادلة مباشرةً.

نعوض لقيم X,Y كالتالي:

نرسم الخط المستقيم عمودياً على محور X كما هو موضح في الشكل (٤ , ٣).

باستخدام قاعدة تحديد اتجاه الخط المستقيم، نجد أن اتجاه الخط سيكون إلى اليسار.

لرسم القيد الثالث:

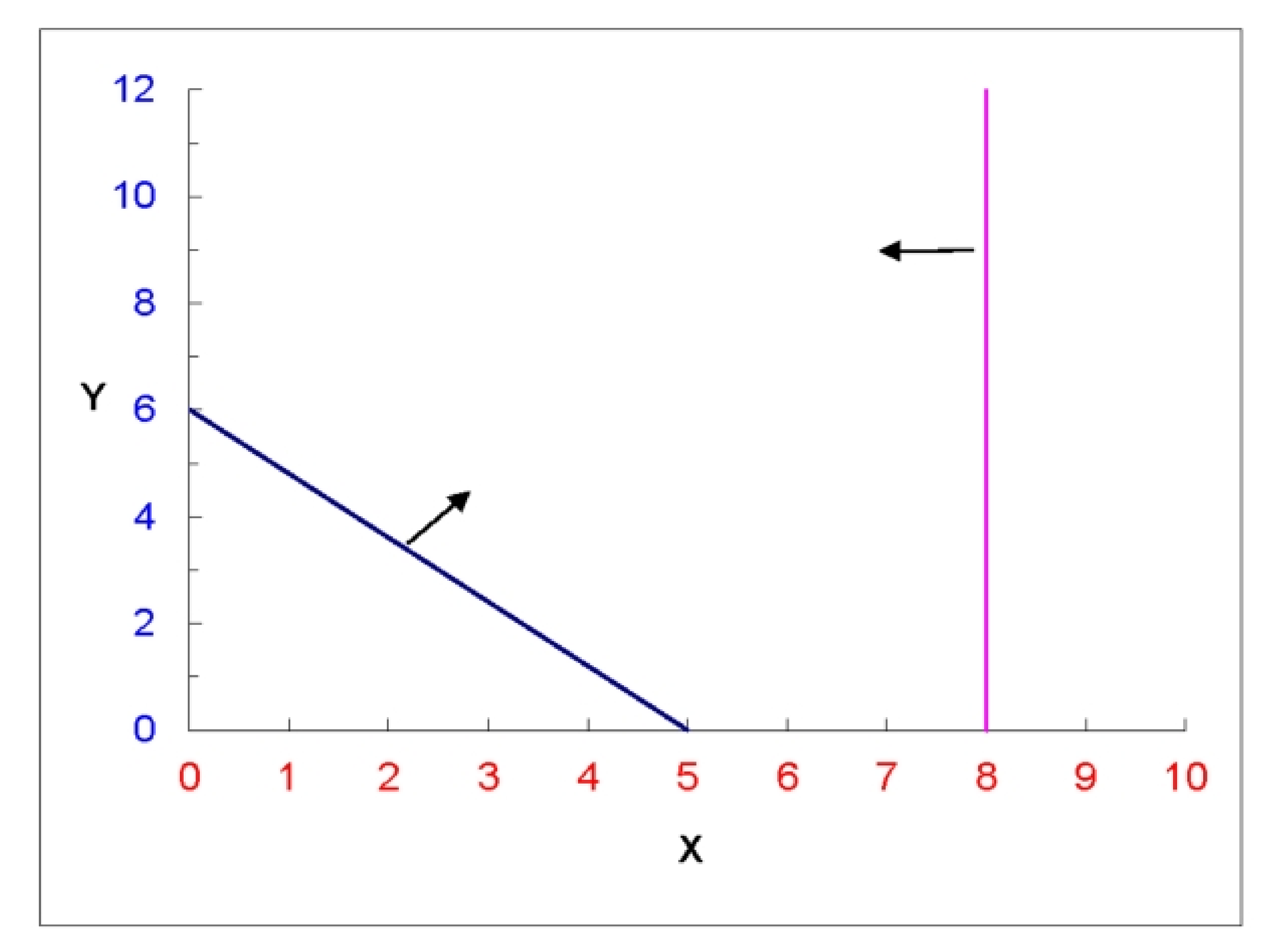
نحول القيد إلى معادلة: $3X - 3Y = 6$

نعوض لقيم X,Y كالتالي:

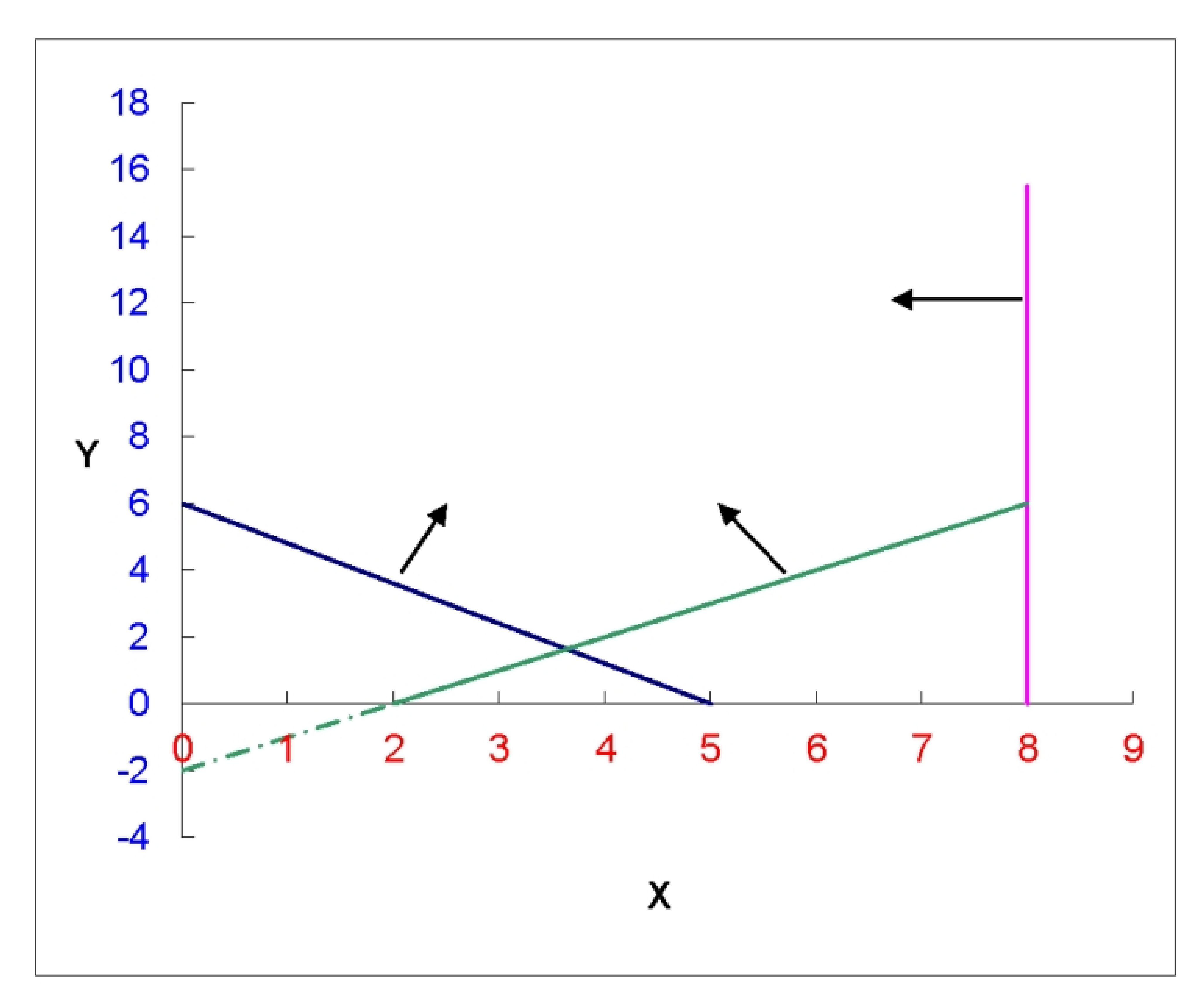
X	Y
0	-2
2	0

نرسم الخط المستقيم كما هو موضح في الشكل (٥ , ٣)، ومن ثم نمد الخط المستقيم في المنطقة الموجبة.

باستخدام قاعدة تحديد اتجاه الخط المستقيم، نجد أن اتجاه الخط سيكون إلى اليسار.



الشكل رقم (٤ , ٣). يوضح الخط المستقيم للقيد الأول والثاني في المسألة ١ , ٣ واتجاههما.



الشكل رقم (٥ , ٣). يوضح الخط المستقيم للقيد الأول والثاني والثالث في المسألة (١ , ٣) واتجاههم.

لرسم القيد الرابع:

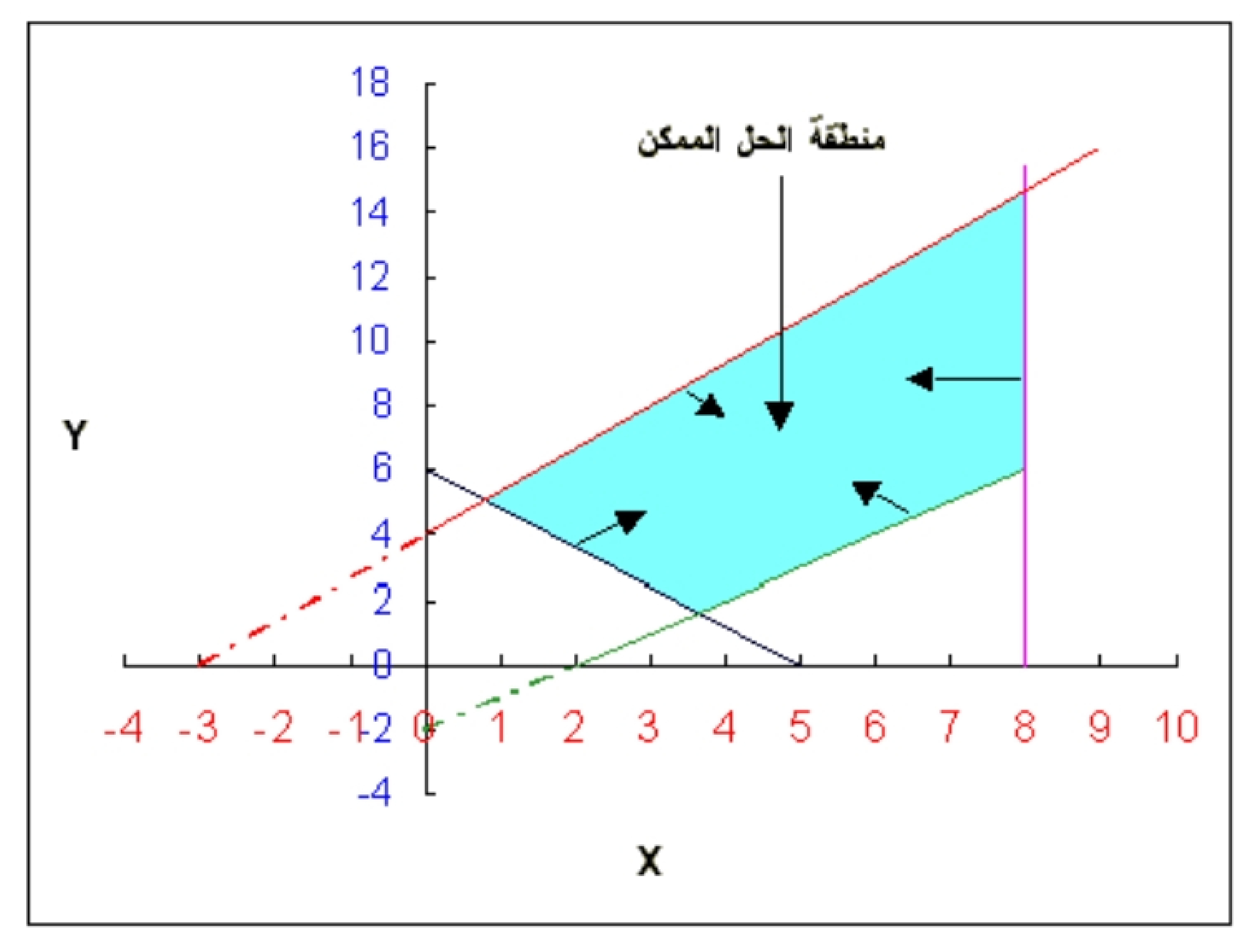
نحول القيد إلى معادلة: $8X - 6Y = -24$

نعوض لقيم X,Y كالتالي:

X	Y
-3	0
0	4

نرسم الخط المستقيم كما هو موضح في الشكل (٦ , ٣)، ومن ثم نمد الخط المستقيم في المنطقة الموجبة.

باستخدام قاعدة تحديد اتجاه الخط المستقيم، نجد أن اتجاه الخط سيكون إلى اليمين.



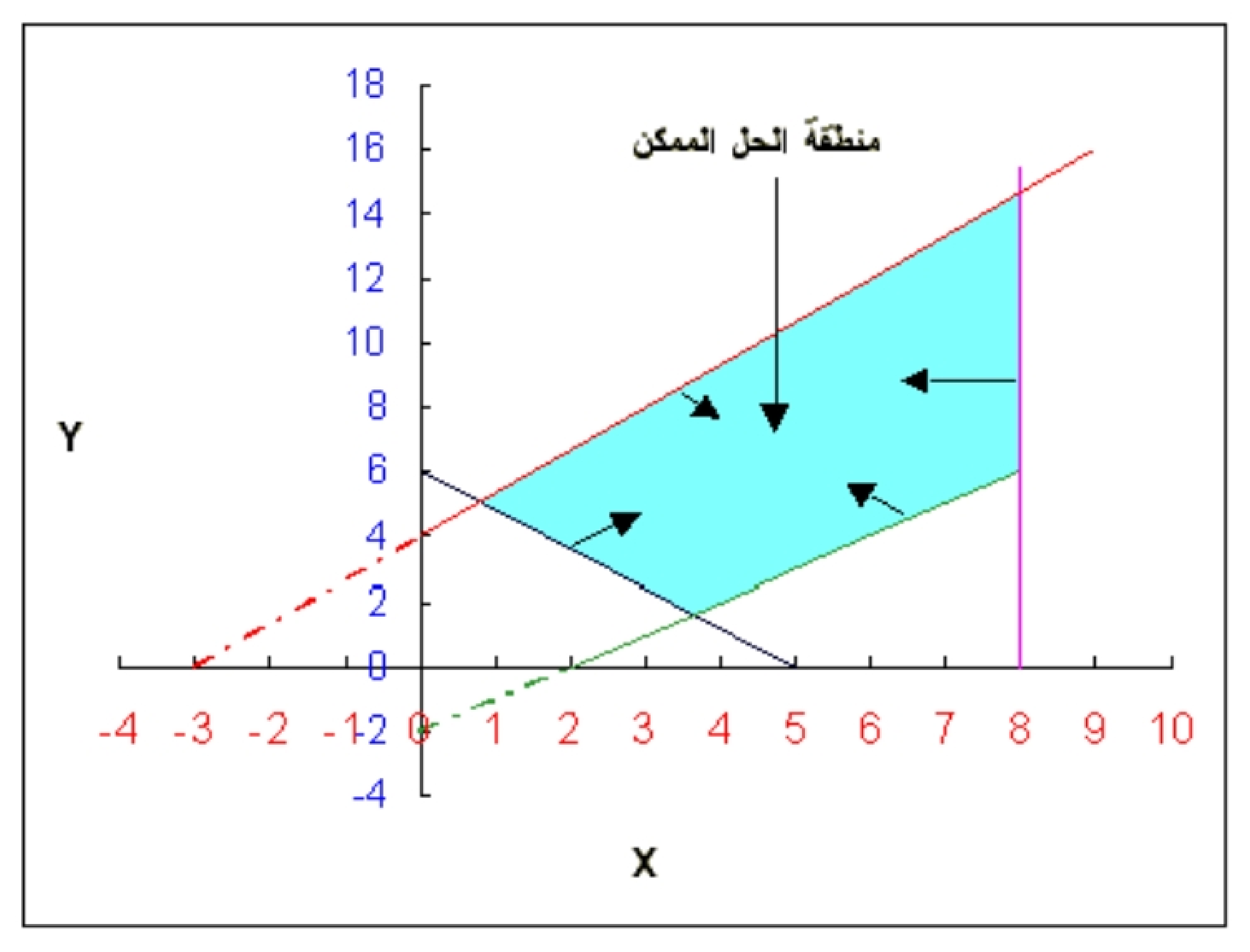
الشكل رقم (٦ ,٣). يوضح الخطوط المستقيمة لجميع القيود واتجاهاتها، ومنطقة الحل الممكن في المسألة(١ ,٣).

تمكنا الآن من رسم جميع القيود، لكن السؤال هل انتهينا هكذا؟ الجواب لا، لم ننته بعد، حيث يجب علينا أن نحدد منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region) إذا توفرت، ومن ثم نبحث عن الحل الأمثل إن أمكن. لكن قبل الاستمرار لابد لنا من تحديد وتعريف دقيق لمنطقة الحلول الممكنة.

ما هي منطقة الحلول الممكنة Feasible Region:

منطقة الحلول الممكنة لابد وأن تأخذ شكلاً محدبًا (convex Shape)، والشكل المحدب هو الشكل الذي إذا اخترت فيه أي نقطتين داخل أو على حدود الشكل ووصلت بينهما بخط مستقيم، فإن هذا الخط (بالكامل) لابد وأن يكون داخل الشكل، ولا يمكن أن يخرج أي جزءٍ منه خارج الشكل. وفي البرمجة الخطية فإن هذا الشكل يكون مضلعاً، ولا يوجد فيه أي منحنيات[Winston, 2004] .

لاحظ الأشكال في الشكل (٧ ,٣أ) تجد أنها أشكال محدبة وينطبق عليها القاعدة السابقة. أما الأشكال في الشكل (٧ ,٣ب)، فلا ينطبق على أي منها هذه القاعدة، ولذلك لا يمكن أن تأخذ منطقة الحلول الممكنة أيًّا من هذه الأشكال.



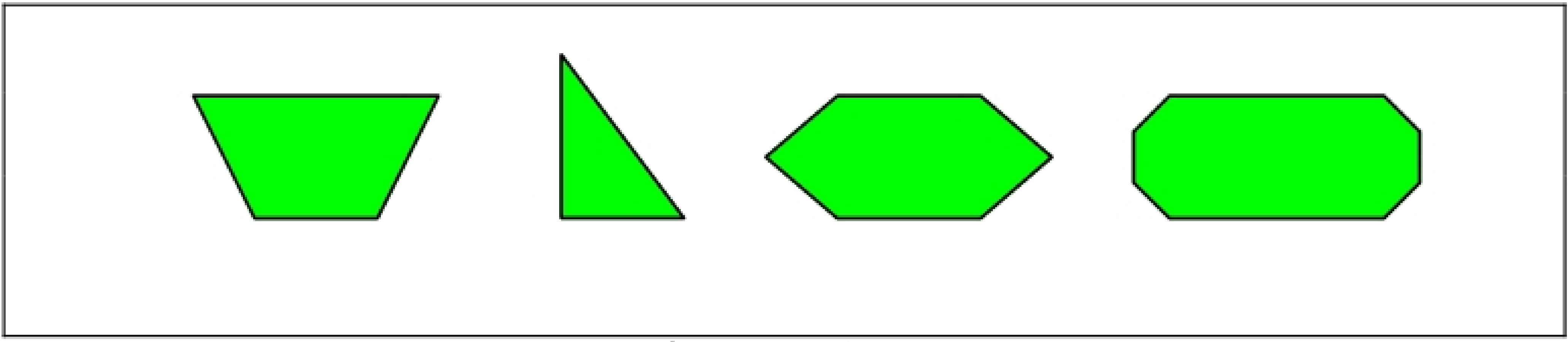
الشكل رقم (٣,٦). يوضح الخطوط المستقيمة لجميع القيود واتجاهاتها، ومنطقة الحل الممكن في المسألة(٣,١).

تمكنا الآن من رسم جميع القيود، لكن السؤال هل انتهينا هكذا؟ الجواب لا، لم ننته بعد، حيث يجب علينا أن نحدد منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region) إذا توفرت، ومن ثم نبحث عن الحل الأمثل إن أمكن. لكن قبل الاستمرار لابد لنا من تحديد وتعريف دقيق لمنطقة الحلول الممكنة.

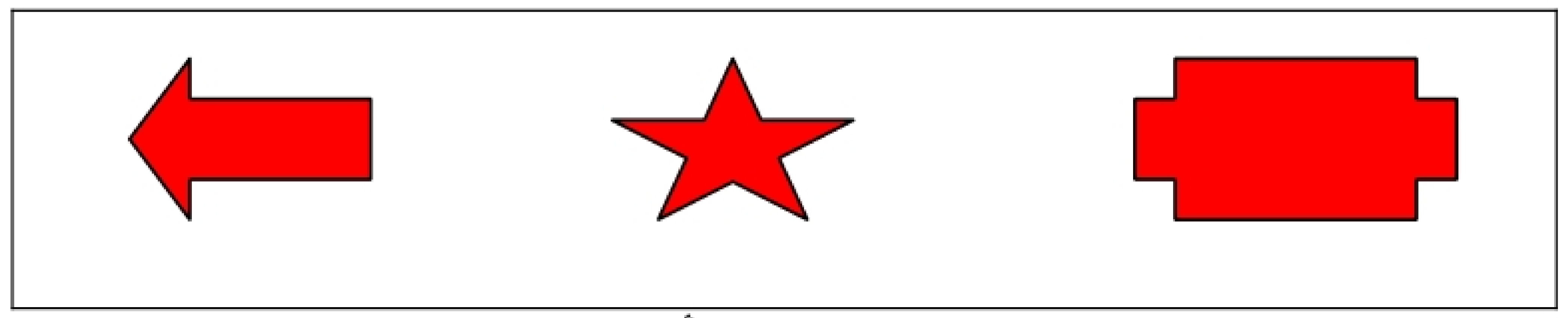
ما هي منطقة الحلول الممكنة Feasible Region:

منطقة الحلول الممكنة لابد وأن تأخذ شكلاً محدبًا (convex Shape)، والشكل المحدب هو الشكل الذي إذا اخترت فيه أي نقطتين داخل أو على حدود الشكل ووصلت بينهما بخط مستقيم، فإن هذا الخط (بالكامل) لابد وأن يكون داخل الشكل، ولا يمكن أن يخرج أي جزءٍ منه خارج الشكل. وفي البرمجة الخطية فإن هذا الشكل يكون مضلعاً، ولا يوجد فيه أي منحنيات[Winston, 2004] .

لاحظ الأشكال في الشكل (٣,٧أ) تجد أنها أشكال محدبة وينطبق عليها القاعدة السابقة. أما الأشكال في الشكل (٣,٧ب)، فلا ينطبق على أي منها هذه القاعدة، ولذلك لا يمكن أن تأخذ منطقة الحلول الممكنة أيًّا من هذه الأشكال.



الشكل رقم (٧, ٣أ). يوضح الأشكال المحدبة.



الشكل رقم (٧, ٣ب). يوضح الأشكال غير المحدبة.

قبل البدء بحل المسألة، سنقوم بذكر الحالات الممكنة الحدوث عند حل أي مسألةٍ من مسائل البرمجة الخطية سواءً كانت باستخدام الرسم البياني، أو باستخدام طريقة السمبلكس.

الحالات الممكنة الحدوث عند حل أي مسألة من مسائل البرمجة الخطية:

عند حل مسائل البرمجة الخطية سنواجه واحدة من الحالات التالية [Gupta and Kanna, 2006]:

١ – حل أمثل (Optimal Solution):

أ. حل أمثل وحيد (Unique Optimal Solution).

ب. حل أمثل بديل أو متعدد (Alternative or Multiple Optimal Solution).

٢ – حل غير محدد (Unbounded Solution).

٣ – المسألة غير ممكنة الحل (Infeasible Problem).

الحالة الأولى: حل أمثل:

يكون للمسألة حلاً أمثل إذا استطعنا الحصول على منطقة الحلول الممكنة حيث إنها شرط في هذه الحالة. في مثالنا السابق استطعنا إيجاد منطقة الحلول الممكنة والمحددة بالرموز ABCD. وحيث إن نقطة الحل الأمثل هي نقطة ركنية دائماً في البرمجة الخطية؛ لأنها تمثل نقطة قصوى فإن الحل الأمثل لهذه المسألة يوجد في واحدة من هذه النقاط الركنية.

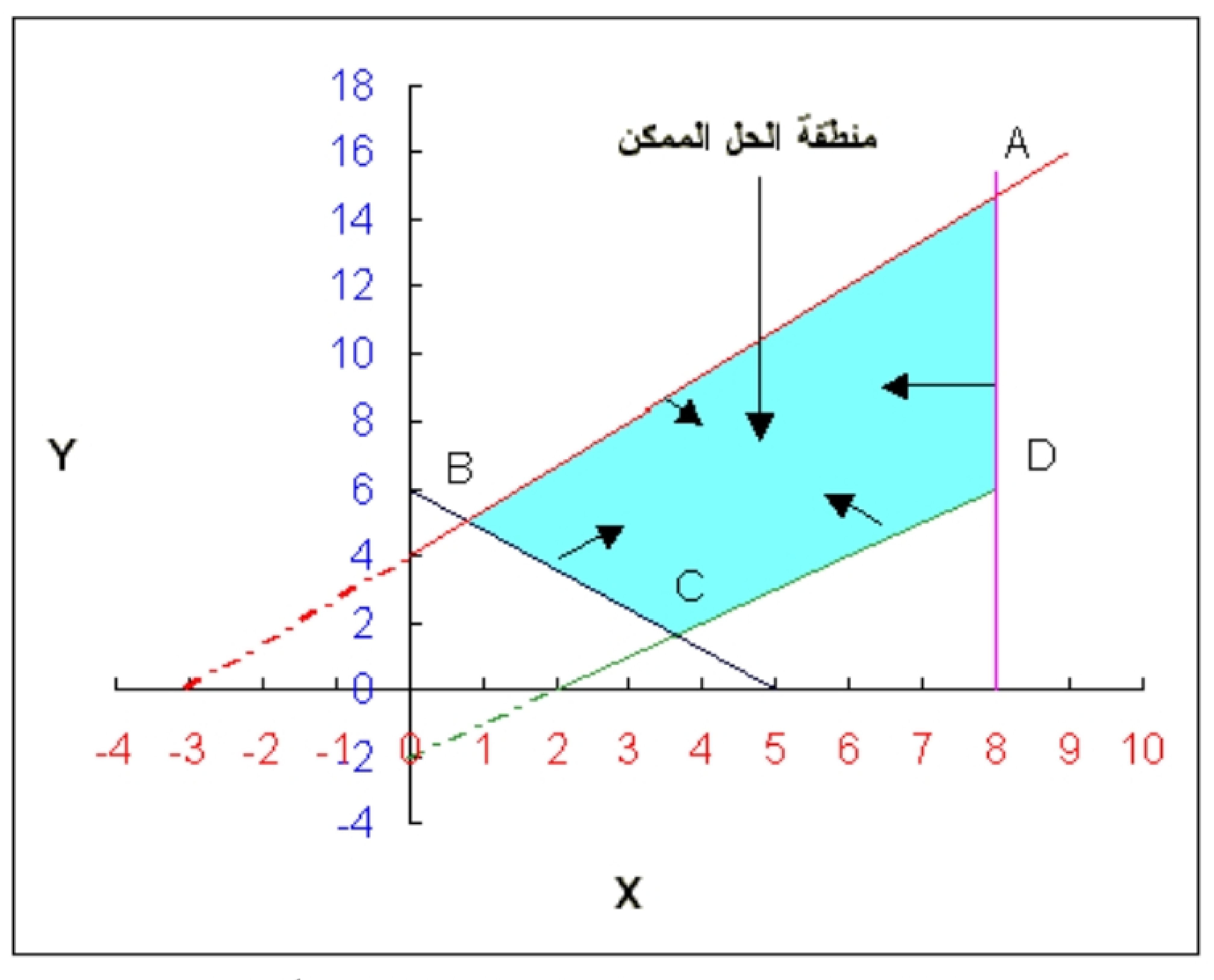
قاعدة (١ , ٣):

الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية يمثل دائماً بواحدة أو أكثر من النقاط الركنية؛ لأن النقاط الركنية هي النقاط القصوى في منطقة الحلول الممكنة.

لإيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة، فيمكن عمل ذلك بطريقتين على الأقل:

أولاً: طريقة تقييم النقاط الركنية:

بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة، يمكن تحديد الحل الأمثل بتقييم دالة الهدف عند كل نقطة ركنية. النقاط الركنية في هذه المسألة هي النقاط A,B,C,D كما في الشكل (٨ , ٣)، وعند كل نقطة تختلف قيم المتغيرات X,Y ، ومن ثم تختلف قيمة دالة الهدف.



الشكل رقم (٨ , ٣). يوضح منطقة الحل الممكن والنقاط الركنية للمسألة (١ , ٣).

يمكن تقييم دالة الهدف عند كل نقطة كالتالي:

- حدد منطقة الحلول الممكنة.
- حدد النقاط الركنية وسمِ كل نقطة.
- ابدأ بالنقطة الأولى، وحدد القيود التي يمثل تقاطعها هذه النقطة.
- حوِّل هذه القيود إلى معادلات بإزالة ≥ أو ≤ وإحلال = بدلاً منهما.
- أوجد جبرياً قيمة كلاً من X وY بحل هذه المعادلات.
- عوض بقيم المتغيرات عند هذه النقطة في دالة الهدف.
- طبق ما سبق على كل نقطة ثم قارن بين قيم دالة الهدف واختر الأفضل من بينهم.

النقطة A تمثل تقاطع القيد الثاني والرابع، وبعد تحويلهما إلى معادلات يمكن حلهما وإيجاد قيمة كل متغير كما يلي:

$2X = 16 \implies X = 8$

$8X - 6Y = -24 \implies 8(8) + 24 = 6Y \implies 6Y = 88 \implies Y = 14.667$

بالتعويض في قيمة دالة الهدف:

$$15X + 20Y \implies 15(8) + 20(14.667) = 413.333$$

النقطة B تمثل تقاطع القيد الأول والرابع، وبعد تحويلهما إلى معادلات يمكن حلهما، وإيجاد قيمة كل متغير كما يلي:

$6X + 5Y = 30 \implies$ بالضرب في 6 $\implies 36X + 30Y = 180$

$8X - 6Y = -24 \implies$ بالضرب في 5 $\implies 40X - 30Y = -120$

وبالجمع $76X = 60 \implies X = 0.7895$

بالتعويض لقيمة X في إحدى المعادلات:

$6X + 5Y = 30 \implies 6(0.7895) + 5Y = 30 \implies 5Y = 25.2631 \implies Y = 5.0526$

بالتعويض في قيمة دالة الهدف:

$15X + 20Y \implies 15(0.7895) + 20(5.0526) = 112.8947$

النقطة C تمثل تقاطع القيد الأول والثالث، وبعد تحويلهما إلى معادلات يمكن حلهما وإيجاد قيمة كل متغير كما يلي:

6X + 5Y = 30 ===➔ بالإبقاء عليها كما هي ===➔ 6X + 5Y = 30

3X – 3Y = 6 ===➔ بالضرب في 2 – ===➔ -6X + 6Y = -12

وبالجمع 11Y = 18 ===➔ Y = 1.6363

بالتعويض لقيمة X في إحدى المعادلات:

3X – 3Y = 6 ===➔3X – 3(1.6363) = 6 ===➔ 3X = 10.909 ===➔ X = 3.6363

بالتعويض في قيمة دالة الهدف:

15X + 20Y ===➔ 15(3.6363) + 20(1.6363) = 87.2727

النقطة D تمثل تقاطع القيد الثاني والثالث، وبعد تحويلهما إلى معادلات يمكن حلهما، وإيجاد قيمة كل متغير كما يلي:

2X = 16 ===➔ X = 8

3X – 3Y = 6 ===➔ 3(8) – 6 = 3Y ===➔ 3Y = 18 ===➔ Y = 6

بالتعويض في قيمة دالة الهدف:

15X + 20Y ===➔ 15(8) + 20(6) = 240

@	X	Y	Z	الحل الأمثل
A	8	14.667	413.333	نعم
B	0.7895	5.0526	112.8947	لا
C	3.6363	1.6363	87.2727	لا
D	8	6	240	لا

اخترنا الحل الأمثل عند النقطة A لأن قيمة Z هي الأكبر، حيث إن دالة الهدف تكبير Max.

ثانياً: طريقة ميل واتجاه مستقيم دالة الهدف:

في البداية لابد من الحديث عن اتجاه مستقيم دالة الهدف، كما هو موضح في الجدول (١ , ٣). ولإيضاح ذلك فإن دالة الهدف Max 5X + 10Y تساوي دالة الهدف Min -5X – 10Y بعد ضرب

الدالة في (1-)، وكلتا الدالتين تعنيان أنه يتعين تكبير قيمة X ، وقيمة Y ليتحقق هدفهما، مما يعني أن الاتجاه سيكون شمال شرقي في الرسم البياني.

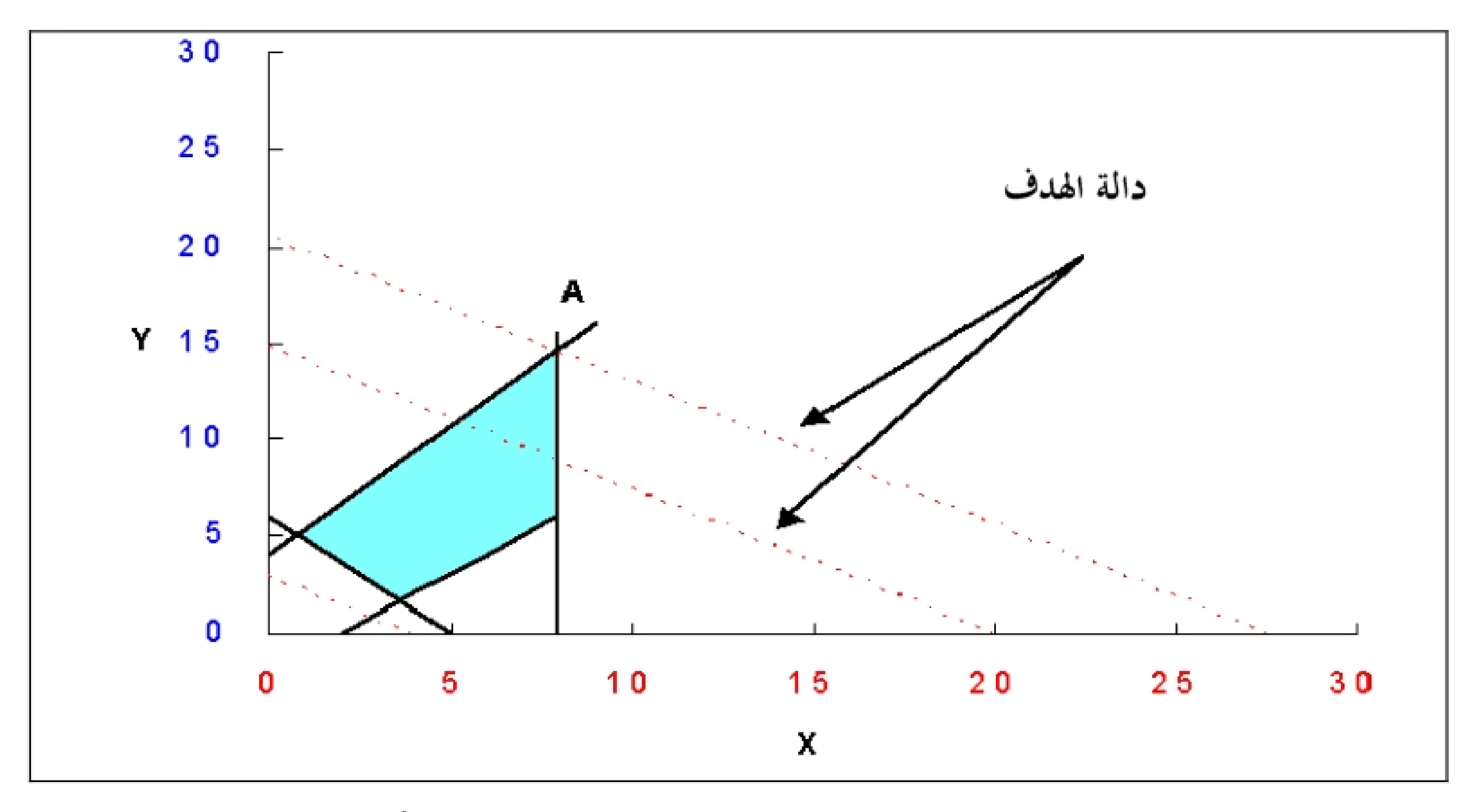
جدول رقم (١ ,٣). يوضح الاتجاهات الممكنة لدالة الهدف.

الأثر	الاتجاه	الدالة	=	الدالة
كبِّر X وكبِّر Y	شمال شرقي	Min -5X – 10Y	=	Max 5X + 10Y
صغِّر X وصغِّر Y	جنوب غربي	Min 5X + 10Y	=	Max -5X - 10Y
كبِّر X وصغِّر Y	جنوب شرقي	Min -5X + 10Y	=	Max 5X - 10Y
صغِّر X وكبِّر Y	شمال غربي	Min 5X – 10Y	=	Max -5X + 10Y

في مثالنا السابق (١ ,٣). نجد أن دالة الهدف هي $Max\ z = 15X + 20Y$، ولذلك يمكن لنا إيجاد ميل دالة الهدف هذه، وذلك كما يلي:

$$15X + 20Y = c \implies 20Y = c - 15X \implies Y = c/20 - (15/20)X$$

إذاً ميل دالة الهدف يساوي 15/20- أو 3/4-، وعليه يمكن رسم دالة الهدف على أساس هذا الميل. كما يمكن رسمها، وذلك بافتراض أي قيمة ثابتة في الجانب الأيمن لدالة الهدف. لنفرض أننا اخترنا القيمة ٦٠ كقيمة ثابت في الجانب الأيمن لدالة الهدف ($15X + 20Y = 60$)، ومن ثم نرسم الخط المستقيم الذي يمثل دالة الهدف كما تعلمنا عند رسمنا للقيود (اخترنا هذا الرقم على أساس أنه مضاعف مشترك لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف). يوضح الشكل (٩ ,٣) دالة الهدف، وعلاقتها بمنطقة الحلول الممكنة، وحيث إن معاملات المتغيرات في دالة الهدف موجبة والمسألة تعظيم (Max) فإن اتجاه مستقيم دالة الهدف سيكون للأعلى (إلى اليمين أو شمال شرقي)، وآخر نقطة ركنية سيلامسها قبل أن يغادر منطقة الحلول الممكنة ستكون النقطة A. تمثل النقطة A تقاطع القيد الثاني مع القيد الرابع، وعند حل معادلتي هذين القيدين جبرياً سنحصل على $X=8$ و$Y=14.667$ ودالة الهدف $z=413.333$.



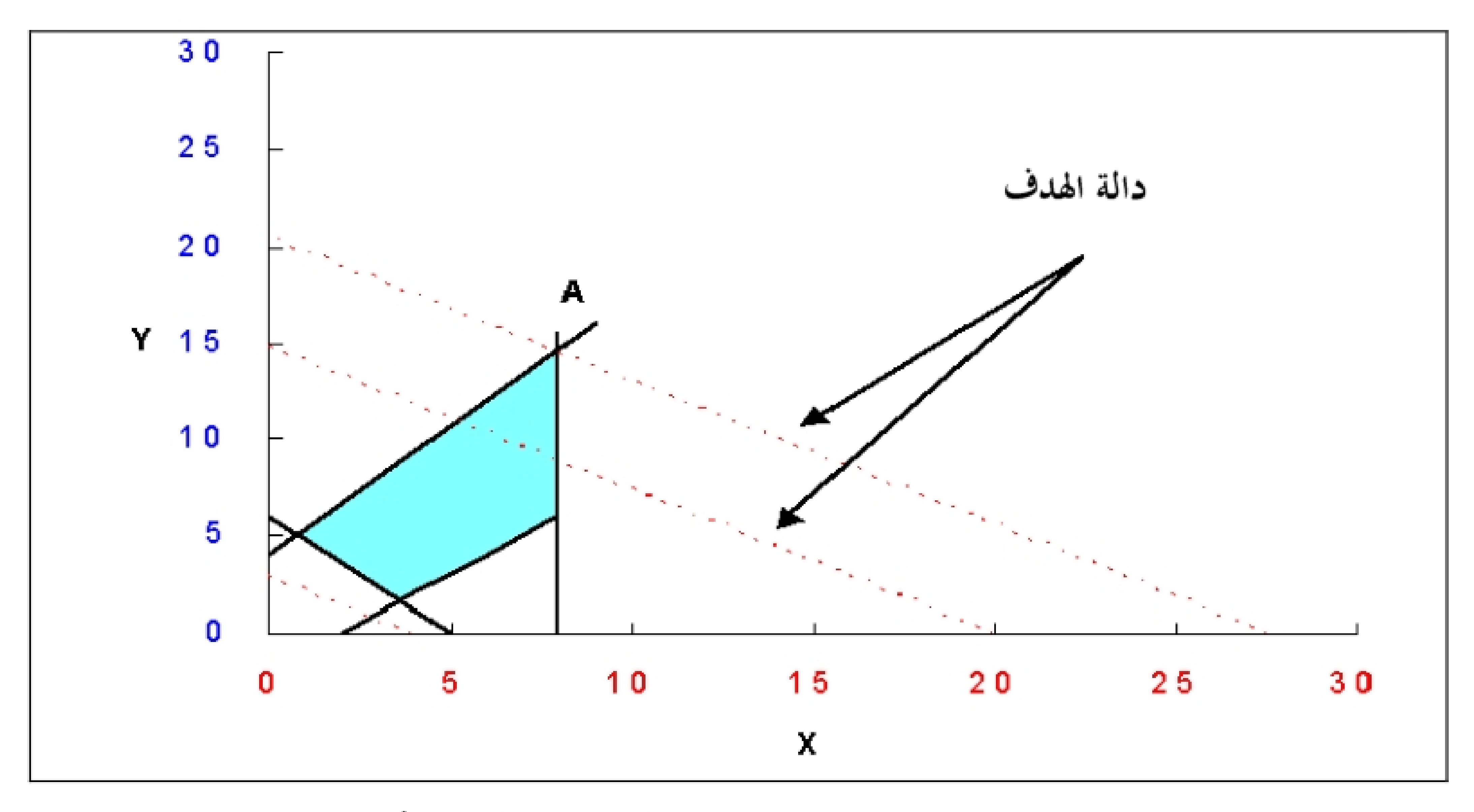
الشكل رقم (٣ , ٩). يوضح مستقيم دالة الهدف ونقطة الحل الأمثل.

حيث إنه لا يوجد حل آخر يعطي نفس قيمة دالة الهدف، فإن هذا الحل هو أفضل الحلول، وهو الحل الأمثل الوحيد (Unique Optimal Solution) لهذه المسألة. وفي هذه الحالة تسمى القيود التي كوَّن تقاطعها نقطة الحل الأمثل قيود نشطة (Active Constraints) [Winston, 2004]. ومن خصائص هذه القيود أنها عندما نعوض فيها بقيمة المتغيرات عند نقطة الحل الأمثل X=8 وY=14.667 ، فإن الجانب الأيسر لهذه القيود يساوي الجانب الأيمن، مما يعني أن موارد هذا القيد مستغلة بالكامل، وهو مالا يتحقق للقيود غير النشطة (Inactive Constraints).

قاعدة (٣ , ٢):

- القيود النشطة هي التي يشكل تقاطعها نقطة الحل الأمثل، وفيها يكون الجانب الأيسر يساوي الجانب الأيمن.
- إذا كان للمسألة حل أمثل، وكان أحد القيود على شكل معادلة، فإن هذا القيد قيدٌ نشطٌ دائماً.

ماذا يحدث لو أضفنا قيداً جديداً إلى المسألة (٣ , ١) وأصبحت كالتالي (المسألة (٣ , ٢)؟



الشكل رقم (٣ , ٩). يوضح مستقيم دالة الهدف ونقطة الحل الأمثل.

حيث إنه لا يوجد حل آخر يعطي نفس قيمة دالة الهدف، فإن هذا الحل هو أفضل الحلول، وهو الحل الأمثل الوحيد (Unique Optimal Solution) لهذه المسألة. وفي هذه الحالة تسمى القيود التي كوَّن تقاطعها نقطة الحل الأمثل قيود نشطة (Active Constraints) [Winston, 2004]. ومن خصائص هذه القيود أنها عندما نعوض فيها بقيمة المتغيرات عند نقطة الحل الأمثل X=8 وY=14.667 ، فإن الجانب الأيسر لهذه القيود يساوي الجانب الأيمن، مما يعني أن موارد هذا القيد مستغلة بالكامل، وهو مالا يتحقق للقيود غير النشطة (Inactive Constraints).

قاعدة (٣ , ٢):

- القيود النشطة هي التي يشكل تقاطعها نقطة الحل الأمثل، وفيها يكون الجانب الأيسر يساوي الجانب الأيمن.
- إذا كان للمسألة حل أمثل، وكان أحد القيود على شكل معادلة، فإن هذا القيد قيدٌ نشطٌ دائماً.

ماذا يحدث لو أضفنا قيداً جديداً إلى المسألة (٣ , ١) وأصبحت كالتالي (المسألة (٣ , ٢)؟

Max z = 15X + 20Y

S.T.

$6X + 5Y \geq 30$

$2X \leq 16$

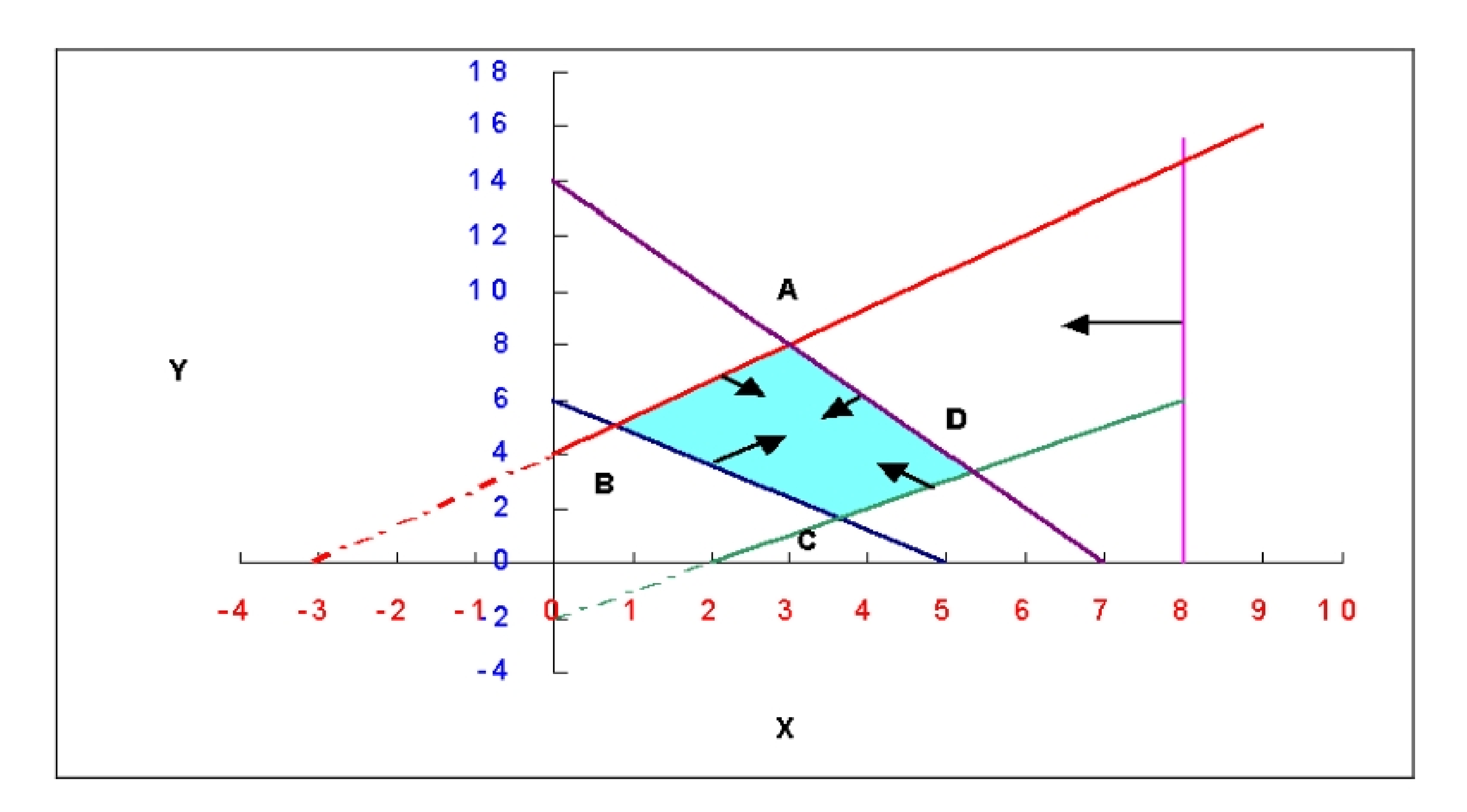
$3X - 3Y \leq 6$

$8X - 6Y \geq -24$

$4X + 2Y \leq 28$

$X, Y \geq 0$

سيصبح الشكل كالتالي:



الشكل رقم (١٠ , ٣). يوضح التأثير على مساحة منطقة الحل الممكن بعد إضافة قيد جديد في المسألة (٢ , ٣).

لاحظ أنه بسبب إضافة قيد جديد، فإن منطقة الحلول الممكنة صغرت، وهذا نتيجة لإضافة قيد لكن هذا ليس شرطاً حيث إن منطقة الحلول الممكنة قد تصغر أو لا تتغير إذا أضفنا قيد جديداً [Winston, 2004]و [Moore et al, 2001]، كما نلاحظ أن القيد الثاني أصبح قيداً مكرراً (Redundant Constraint)، والقيد المكرر لا حاجة لوجوده، حيث إنه خارج حدود منطقة الحلول الممكنة، ولا يعارض القيود الأخرى، فلو حذفناه، فإن منطقة الحلول الممكنة لن تتأثر. لكن معرفتنا بوجود قيد مكرر سيفيد في كثير من القرارات حيث يمكن استغلال الموارد الخاصة بهذا القيد لمصلحة قيود

أخرى على أمل تحسين الحل الأمثل . الحل الأمثل في هذه الحالة هو عند النقطة A الجديدة حيث X=3 و Y=8 ودالة الهدف z=205.

قاعدة (٣ ,٣):
إضافة قيد يؤدي إلى أن:
▪ تصغر منطقة الحلول الممكنة أو تبقى ثابتة إنها لا تكبر.
▪ يسوء الحل الأمثل أو لا يتغير لكن لا يتحسن.
حذف قيد يؤدي إلى أن:
▪ تكبر منطقة الحلول الممكنة أو تبقى ثابتة إنها لا تصغر.
▪ يتحسن الحل الأمثل أو لا يتغير لكن لا يسوء.
حذف القيد المكرر أو إضافته لا يؤثر على الحل الأمثل.

ماذا يحدث لو غيرنا دالة الهدف في المسألة (٢ ,٣)، وأصبحت كالتالي (المسألة ٣ ,٣):

Max z = 40X + 20Y
S.T.

$$\begin{aligned} 6X + 5Y &\geq 30 \\ 2X &\leq 16 \\ 3X - 3Y &\leq 6 \\ 8X - 6Y &\geq -24 \\ 4X + 2Y &\leq 28 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

سيصبح الحل الأمثل عند النقطة A أو D أو أي نقطة تقع بينهما. وهذا يعني أن لدينا حلاً بديلاً أو متعددًا Alternative (Multiple) Optimal Solution. سبب حدوث هذا الأمر أن ميل دالة الهدف يساوي ميل القيد النشط الخامس.

الحالة الثانية: الحل غير محدد (Unbounded Solution):

تكون مسألة البرمجة الخطية غير محددة الحل [Taha, 2007]، إذا كانت منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من إحدى الجهات، وكان اتجاه دالة الهدف نحو تلك الجهة المفتوحة، وتتكوّن تلك الحالة سواء كانت دالة الهدف Max أو Min حيث إن المعيار اتجاه دالة الهدف. لكن يجب التنويه هنا أن الحل غير محدد حلٌ غير واقعي وناتج من خطأ في صياغة المسألة، أو تعريف المشكلة، أو الحصول على

بيانات خاطئة، ويجب العودة إلى دراسة المشكلة من جديد إن صعب اكتشاف الخطأ. والغرض من دراسته رغم عدم واقعيته هو لأغراض نظرية (تعليمية) فقط.

الحل الأمثل	Z	Y	X	@
نعم	280	8	3	A
لا	132.63	5.0526	0.7895	B
لا	178.18	1.6363	3.6363	C
نعم	280	3.333	5.333	D

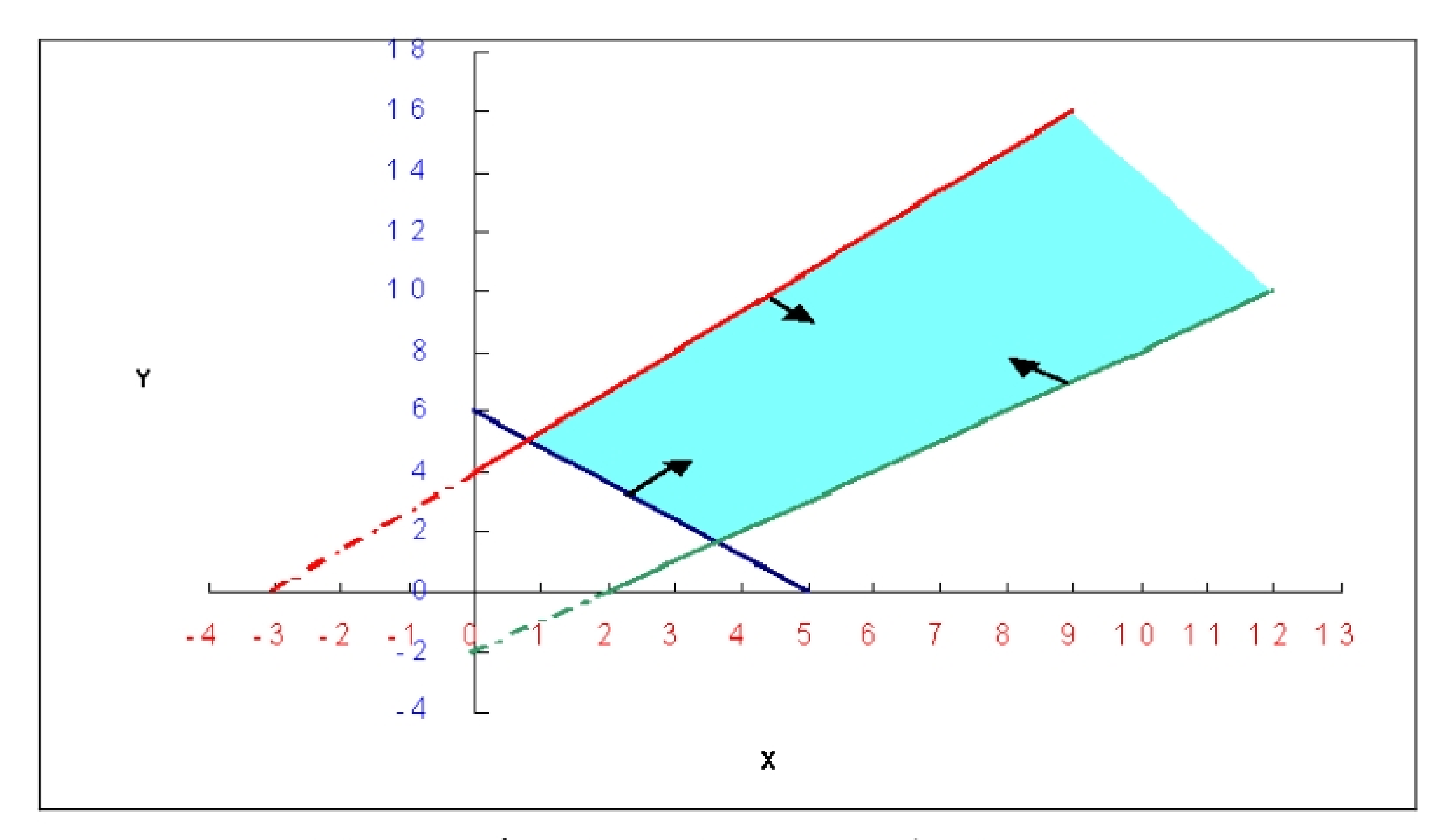
لنأخذ المثال السابق (٣,٣) بعد إجراء بعض التغييرات عليه (المسألة ٤ ,٣):

Max $z = 40X + 20Y$
S.T.
$6X + 5Y \geq 30$
$3X - 3Y \leq 6$
$8X - 6Y \geq -24$
$X, Y \geq 0$

لاحظ أن منطقة الحل مفتوحة باتجاه شمال شرقي (شكل ٣,١١)، وهو نفس اتجاه دالة الهدف، مما يعني أن قيم المتغيرات يمكن أن تكون مالا نهاية، وهذا يؤدي إلى أن تكون قيمة دالة الهدف مالا نهاية. وهذه القيمة غير واقعية حيث لا يمكن لأحد الحصول على مالا نهاية من الأرباح أو المبيعات؛ لأن الموارد دائماً محدودة. وللعلم بالشيء وحتى لا يُظن أن هذه الحالة خاصة بحالة Max، فيمكن أن تكون دالة الهدف لنفس المسألة:

$$\text{Min } w = -40X - 20Y$$

و يكون الحل غير محدد؛ حيث إن اتجاه دالة الهدف ما زال في اتجاه المنطقة المفتوحة لمنطقة الحلول الممكنة.



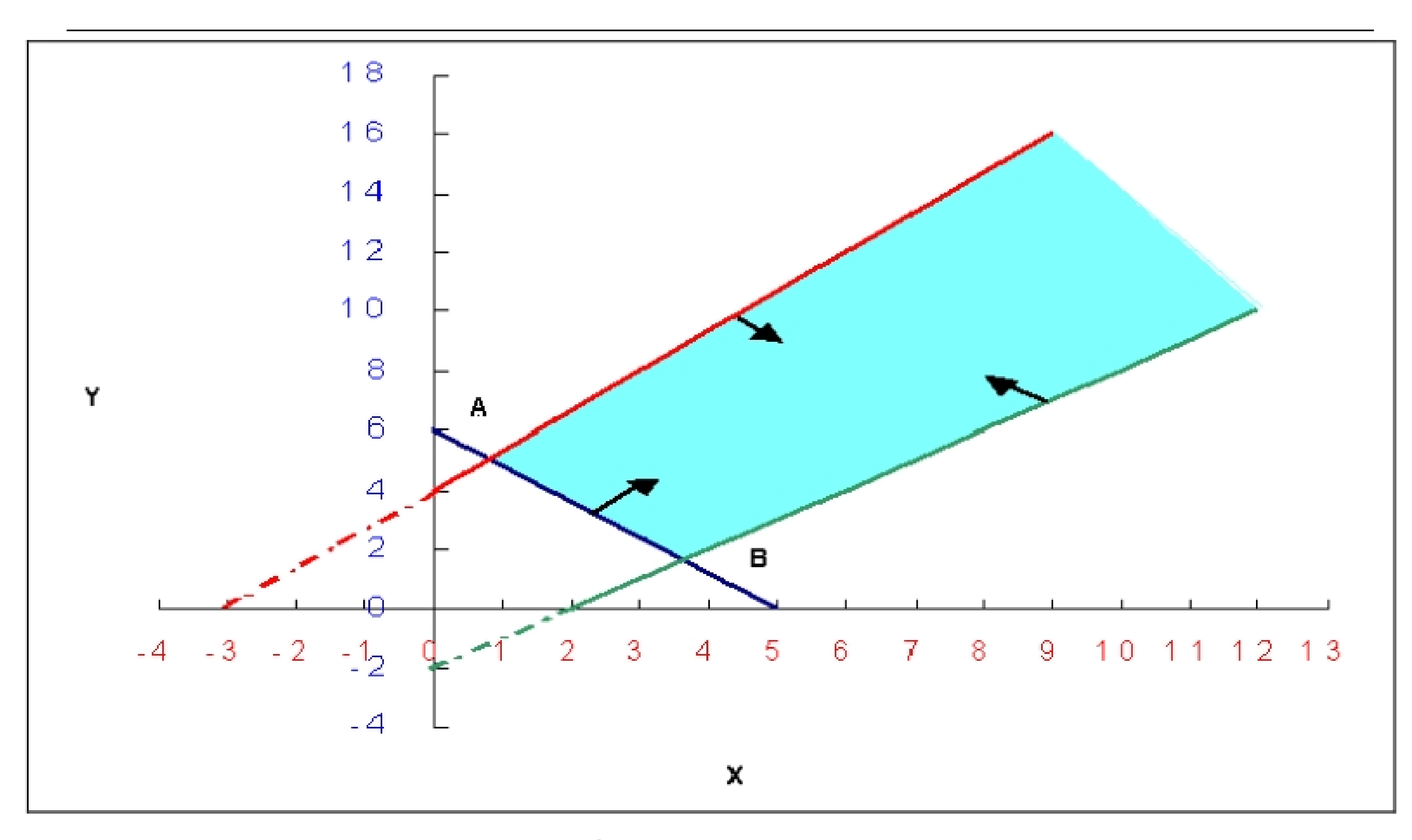
الشكل رقم (٣,١١). يوضح أن منطقة الحل الممكن مفتوحة في المسألة (٣,٣) والحل غير محدد.

كما يجب الانتباه إلى أن كون منطقة الحل مفتوحة من إحدى الجهات، فهذا لا يعني أن الشكل غير محدب، بل على العكس، فإن أي نقطتين داخل أو على حدود هذا الشكل يمكن الوصل بينهما بخط مستقيم دون الخروج من الشكل، كذلك يمكن أن يكون هناك حلٌ أمثلٌ لو غيرنا دالة الهدف فقط لهذه المسألة (المسألة ٣,٥)، وأصبحت مثلاً:

$$\text{Min } w = 40X + 20Y$$

فسيكون الحل هنا، كما هو موضح في الشكل (٣,١٢) عند النقطة A.

@	X	Y	Z	الحل الأمثل
A	0.7895	5.0526	132.63	نعم
B	3.6363	1.6363	178.18	لا



الشكل رقم (١٢ ,٣). يوضح أن منطقة الحل الممكن مفتوحة في المسألة (٣ ,٣)، لكن يوجد حل أمثل عند النقطة A .

قاعدة (٤ ,٣):

إذا كانت منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من إحدى الجهات، فإن منطقة الحلول الممكنة تأخذ الشكل المحدب.

يمكن أن تكون منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من إحدى الجهات، ويكون لدينا حلٌ أمثلٌ.

أن تكون المسألة غير محددة الحل، فهذا ناتج من خطا في صياغة أو دراسة المسألة، حيث هو حلٌ غير واقعي.

أن تكون المسألة غير محددة الحل ليس لها علاقة بالقيود، وإنما بدالة الهدف .

تحدث حالة المسألة غير محددة الحل في حالتي Max و Min.

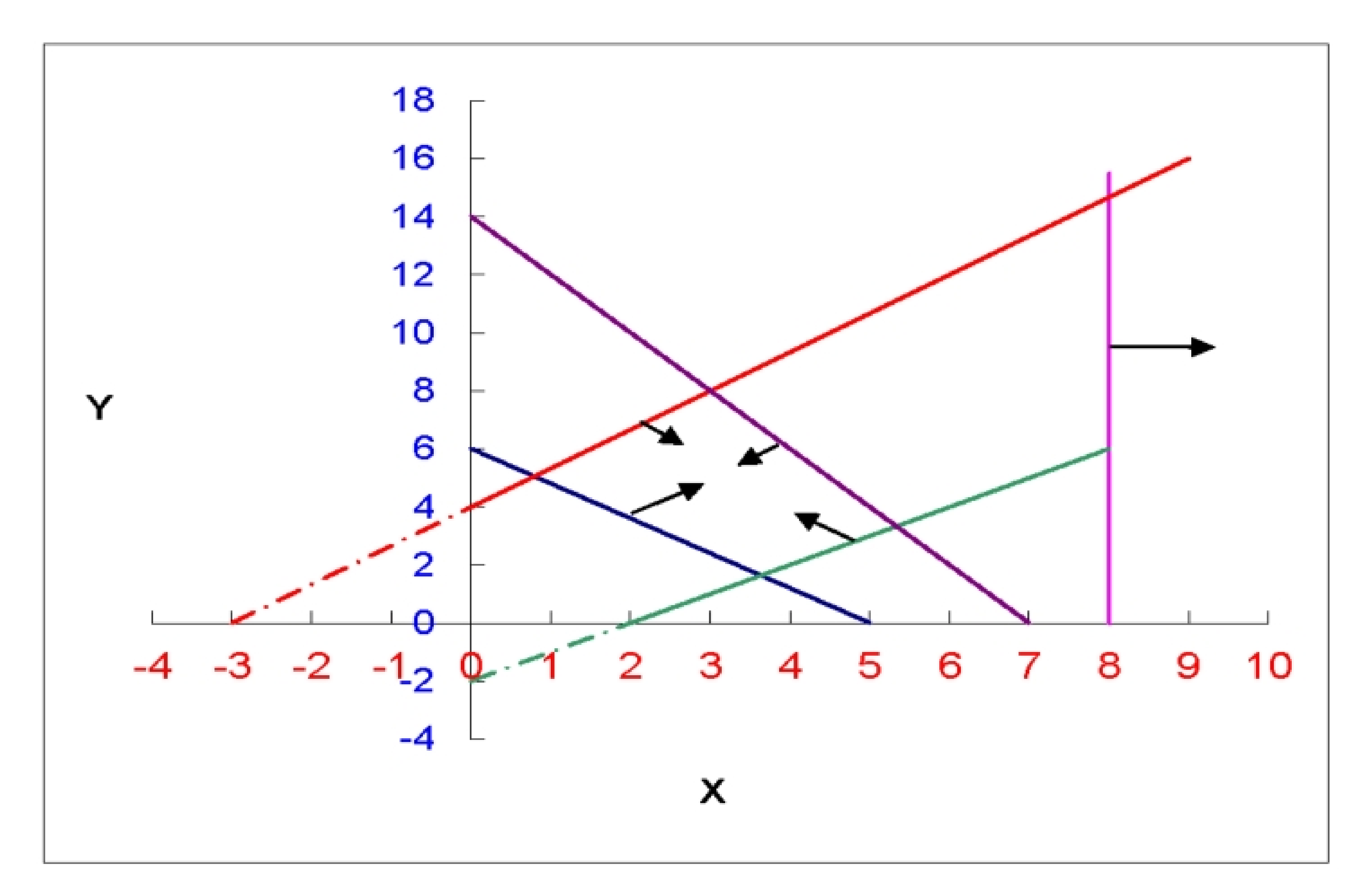
الحالة الثالثة: المسألة غير ممكنة الحل (Infeasible Solution):

تكون مسألة البرمجة الخطية غير ممكنة الحل إذا حدث تضارب أو تعارض بين القيود [Taha, 2007]، والمثال التالي (المسألة ٦ , ٣) يوضح هذه الحالة:

Max z = 15X + 20Y
S.T.

$$6X + 5Y \geq 30$$
$$X \geq 8$$
$$3X - 3Y \leq 6$$
$$8X - 6Y \geq -24$$
$$4X + 2Y \leq 28$$
$$X, Y \geq 0$$

يوضح الرسم البياني (شكل رقم ١٣ , ٣) أن القيد الثاني يعارض القيد الخامس، ولذلك فإن أي نقطة مختارة في المنطقة الموجبة ستعارض أحد القيدين على الأقل، ولذلك لا يوجد منطقة حل ممكن. ولابد من التأكيد هنا أن هذه الحالة (على عكس حالة الحل غير محدد) حالة واقعية، وتظهر في حالات كثيرة. ولتبيين ذلك، نفرض أن القيد الثاني كان يمثل حالة أن الجهة الرسمية المخولة بإعطاء الترخيص للمنشأة تشترط أن كمية الإنتاج من المنتج X يجب ألا يقل عن ٨ وحدات، وهنا على هذه المنشأة أن تحسن من مواردها، أو أن تخرج من هذا النشاط.



الشكل رقم (١٣ , ٣). يوضح عدم وجود منطقة حل ممكن لتعارض اتجاهات القيود، ولذلك فالمسألة غير ممكنة الحل.

قاعدة (٥ , ٣):

أن تكون المسألة غير ممكنة الحل ناتجة من تعارض القيود.

المسألة غير ممكنة الحل مسألة واقعية وكثيراً ما تحدث.

ماذا يحدث لو كان لدينا قيد واحد أو أكثر على شكل معادلة؟:

لو كان لدينا قيد أو أكثر على شكل معادلة، فإننا سنواجه فقط بحالتين:

١. أن يكون لدينا حل أمثل: وهنا تقع منطقة الممكن على مستقيم القيد الممثل بشكل معادلة، أو جزء منه الذي يرضي جميع القيود الأخرى، ومن ثم يكون لدينا:

أ. حل أمثل وحيد، أو متعدد، إذا كان لدينا قيد واحد فقط على شكل معادلة.

ب. حل أمثل وحيد لو كان لدينا أكثر من قيد على شكل معادلة، وتكون نقطة الحل الأمثل هي نقطة تقاطع هذه القيود (المعادلات)، التي ترضي جميع القيود الأخرى.

٢. أن تكون المسألة غير ممكنة الحل إذا:

أ. كان لدينا أكثر من قيد على شكل معادلة، ولكنها لا تتقاطع مع بعضها.

ب. كان هناك لدينا قيد واحد أو أكثر، وتتقاطع مع بعضها، لكنها تتعارض مع باقي القيود.

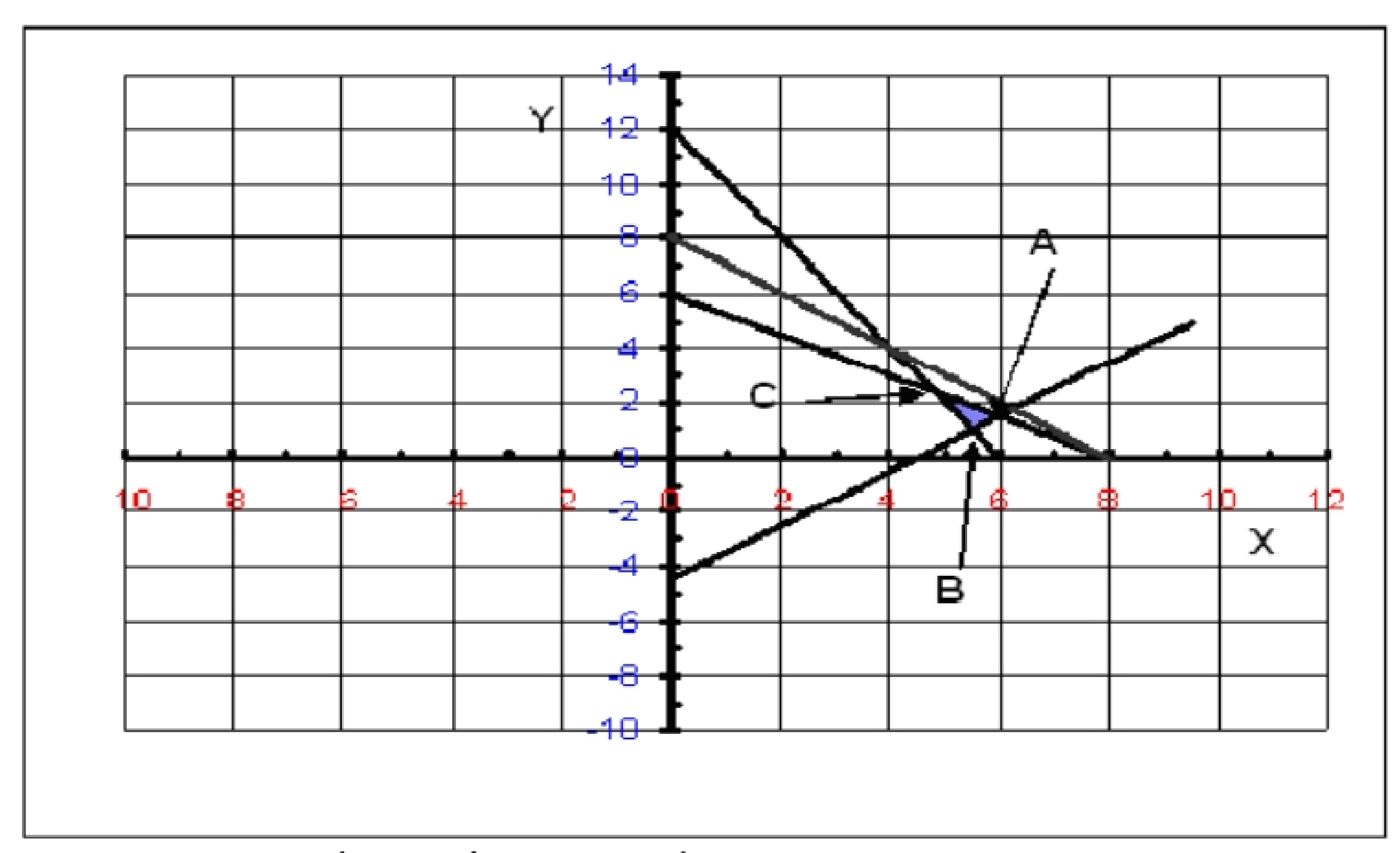
تمارين محلولة

السؤال الأول: باستخدام الرسم البياني أوجد الحل المثل إن أمكن لصيغة البرنامج الخطي التالي:

Max Z = 8X + 5Y
S.T.

$$2X + Y \geq 12$$
$$3X + 4Y \leq 24$$
$$2X + 2Y \leq 16$$
$$3X - 3Y \leq 13.5$$
$$X, Y \geq 0$$

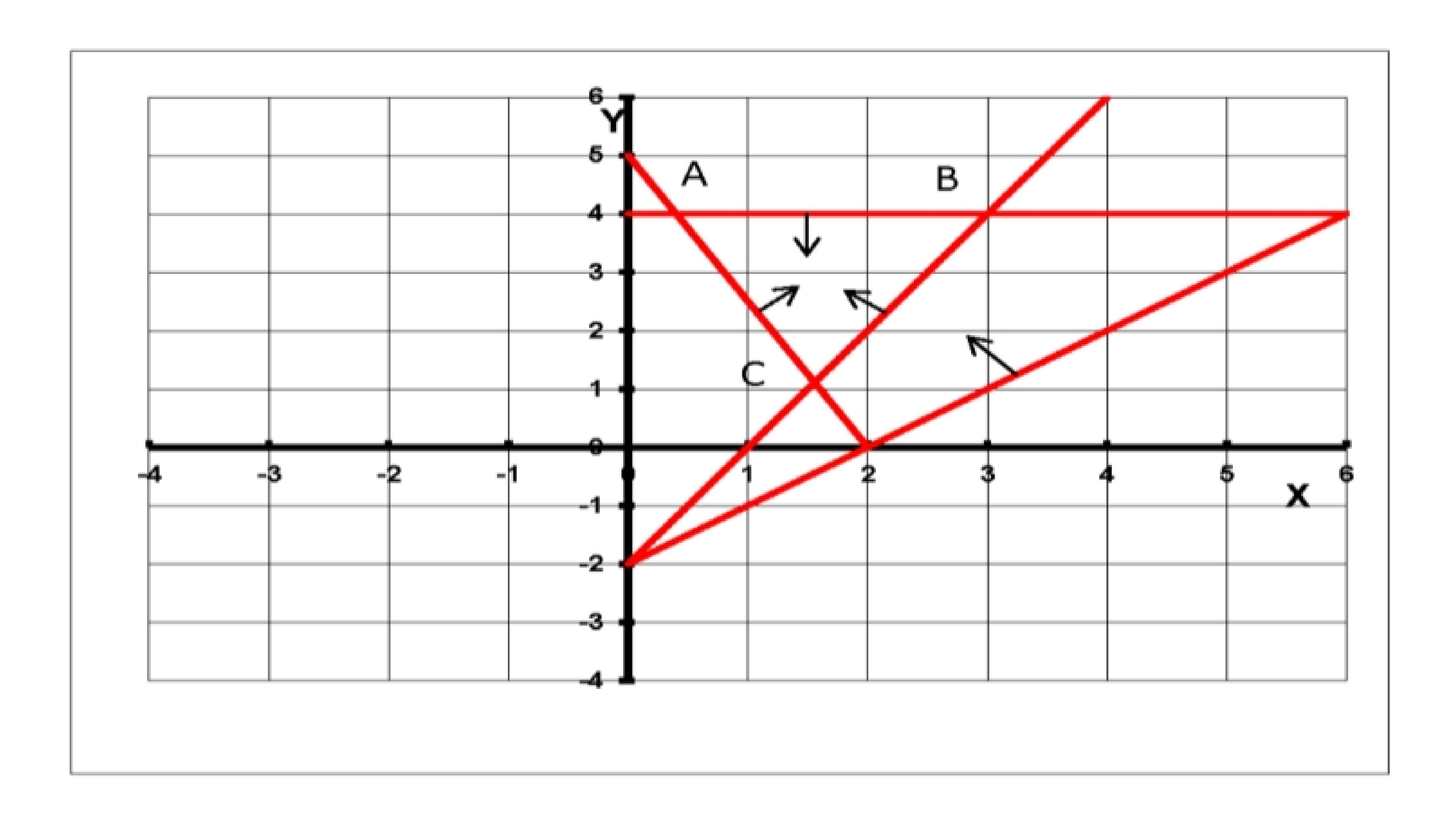
نقطة الحل الأمثل تقع عند النقطة A ، وعندها X=6, Y=1.5, Z=55.5.



السؤال الثاني: باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية:

Max z = 10X + 8Y
Subject To:

$$5X + 2Y \geq 10$$
$$12X - 6Y \leq 12$$
$$-9X + 9Y \geq -18$$
$$2Y \leq 8$$
$$X, Y \geq 0$$



@	X	Y	Z	الحل الأمثل
A	0.4	4	36	لا
B	3	4	62	نعم
C	1.555	1.111	24.444	لا

تمارين

السؤال الأول: باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 10X_1 + 5X_2\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 3X_1 + 2X_2 \le 12\\
&\quad -3X_1 + 6X_2 \le -6\\
&\quad X_2 \le 5\\
&\quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الثاني: للبرنامج الخطي التالي، أوجد الحل الأمثل إن أمكن باستخدام الرسم البياني:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 15X + 20Y\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 6X + 5Y \ge 30\\
&\quad 2X \le 16\\
&\quad 3X - 3Y \le 6\\
&\quad 8X - 6Y \ge -24\\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الثالث: باستخدام الرسم البياني أوجد الحل المثل إن أمكن لصيغة البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 8X + 5Y\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 2X \ge 4\\
&\quad 6X + 4.5Y \le 36\\
&\quad 4X - 8Y \le 16\\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الرابع: باستخدام الرسم البياني أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 10X + 20Y\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 6X + 5Y \le 30\\
&\quad 2X - 4Y \ge -8\\
&\quad 4X - 8Y \le 16\\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الخامس: باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصياغة الرياضية التالية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 10X + 15Y\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 4X + 6Y \ge 12\\
&\quad 6X + 4Y \le 24
\end{aligned}$$

$4X - 4Y \geq -12$
$2X \leq 10$
$X, Y \geq 0$

السؤال السادس: باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصياغة الرياضية التالية:

Min w = 10X + 15Y
S.T.

$$\begin{aligned} 4X - 6Y &\geq 12 \\ 6X + 4Y &\geq 24 \\ 4X - 4Y &\geq -12 \\ 2X &\leq 10 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

السؤال السابع: للمسألة التالية والمرسومة على يمين الصيغة الرياضية، أجب على التالي:

Min z = 10X +20Y
S.T.

$$\begin{aligned} 3X+6Y &\geq 18 \\ 2X &\geq 6 \\ 6X - 6Y &\geq 12 \\ -4X + 12Y &\geq 12 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

١-منطقة الحل الممكن هي المنطقة:

٢-القيود النشطة هي:

٣-القيود المكررة هي:

٤-الحل الأمثل هو :

أ. Z = Y = X = ب. غير محدد ج. غير ممكن

٥-لو كانت دالة الهدف Max Z =10X – 20Y ، فإن الحل الأمثل هو:

أ. Y = X = Z = ب. غير محدد ج. غير ممكن

$4X - 4Y \geq -12$
$2X \leq 10$
$X, Y \geq 0$

السؤال السادس: باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصياغة الرياضية التالية:

$$\text{Min } w = 10X + 15Y$$
S.T.
$$4X - 6Y \geq 12$$
$$6X + 4Y \geq 24$$
$$4X - 4Y \geq -12$$
$$2X \leq 10$$
$$X, Y \geq 0$$

السؤال السابع: للمسألة التالية والمرسومة على يمين الصيغة الرياضية، أجب على التالي:

$$\text{Min } z = 10X + 20Y$$
S.T.
$$3X+6Y \geq 18$$
$$2X \geq 6$$
$$6X - 6Y \geq 12$$
$$-4X + 12Y \geq 12$$
$$X, Y \geq 0$$

١-منطقة الحل الممكن هي المنطقة:

٢-القيود النشطة هي:

٣-القيود المكررة هي:

٤-الحل الأمثل هو :

أ. Z =   Y =   X =   ب. غير محدد   ج. غير ممكن

٥-لو كانت دالة الهدف Max Z =10X – 20Y ، فإن الحل الأمثل هو:

أ. Y =   X =   Z =   ب. غير محدد   ج. غير ممكن

السؤال الثامن: باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن لصيغة البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 2X + Y \\
&\text{S.T.} \\
&\quad X + 2Y \le 10 \\
&\quad 2X + 2Y \le 12 \\
&\quad 3X - 3Y \le 6 \\
&\quad X - 2Y \le 1 \\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

السؤال التاسع: باستخدام الرسم البياني أوجد الحل الأمثل إن أمكن (للمسألة السابقة بعد التغيير كما يلي):

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 2X + Y \\
&\text{S.T.} \\
&\quad X + 2Y \ge 10 \\
&\quad 2X + 2Y \le 12 \\
&\quad 3X - 3Y \le 6 \\
&\quad X - 2Y \ge 1 \\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

السؤال العاشر: باستخدام الرسم البياني أوجد الحل الأمثل إن أمكن (للمسألة السابقة بعد التغيير كما يلي):

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 2X + Y \\
&\text{S.T.} \\
&\quad X + 2Y \ge 10 \\
&\quad 2X + 2Y \ge 12 \\
&\quad 3X - 3Y \ge 6 \\
&\quad X - 2Y \ge 1 \\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

السؤال الحادي عشر: باستخدام الرسم البياني أوجد الحل الأمثل إن أمكن (للمسألة السابقة بعد التغيير كما يلي):

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = 2X + Y \\
&\text{S.T.} \\
&\quad X + 2Y \ge 10 \\
&\quad 2X + 2Y \ge 12 \\
&\quad 3X - 3Y \ge 6 \\
&\quad X - 2Y \ge 1 \\
&\quad X, Y \ge 0
\end{aligned}
$$

السؤال الثاني عشر: باستخدام الرسم البياني للصيغة التالية:

$$\text{Max } z = 3X + 4Y$$
S.T.
$$2X + 2Y \leq 11$$
$$4X + 2Y \geq 16$$
$$X, Y \geq 0$$

أ. ما هو الحل الأمثل إن أمكن.

ب. إذا زاد الجانب الأيمن للقيد الأول، وأصبح ١٤، ما هو الحل الأمثل، ولماذا؟

المراجــع
References

Gupta M.P., and Kanna R.B.: Quantitative Techniques For Decision Making, 2nd ed., Prentice-Hall, India, 2006.

Moore J.F., and Weatherford L.R.: Decision Modeling With Microsoft Excel, 6th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2001.

Taha, Hamdy A.: Operations Research: An Introduction, 8th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2007.

Taylor III, Bernard: Introduction to Management Science, 10th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2010.

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

الفصل الرابع

طريقة السمبلكس
Simplex Method

إن استخدام الحل البياني (الهندسي) لحل مسائل البرمجة الخطية يتطلب وجود متغيرين فقط، وعندما يكون عدد المتغيرات ثلاثة، يصبح الحل البياني صعباً؛ وذلك لأن التعامل سيكون مع مسألة ذات ثلاثة أبعاد، وعلى هذا فإذا زاد عدد المتغيرات عن ثلاثة، فإن الحل البياني يكون غير ممكن التطبيق. وهنا يمكن استخدام طريقة أو خوارزمية السمبلكس بغض النظر عن عدد المتغيرات سواء كان عددها اثنين أو أكثر.

بدأ استخدام طريقة السمبلكس في أواخر الأربعينيات الميلادية عن طريق جورج دانتزج George Dantzig [Taylor III, 2010] ، وتعتمد على الجبر الخطي باستخدام المصفوفات لحل مسائل البرمجة الخطية. وتقوم هذه الطريقة على إيجاد حل أولي ممكن، ومن ثم الانتقال إلى حل أفضل عن طريق الانتقال إلى أفضل نقطة ركنية مجاورة، وتستمر الانتقالات حتى نصل إلى أفضل حل إن وُجد ويكون هو الحل الأمثل. وهذه الطريقة تُمثل بجداول، وكل جدول يمثل مرحلة من مراحل الحل. وكلما زاد عدد المتغيرات فإن طريقة السمبلكس تظهر كفاءتها حيث تختصر الوقت؛ لأنها في كل مرحلة تنتقل إلى أفضل نقطة ركنية مجاورة دون الحاجة إلى الانتقال إلى جميع النقاط الركنية.

كيف نبدأ حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام السمبلكس؟

تبدأ هذه الطريقة بتحويل الصيغة الرياضية لمسألة البرمجة الخطية إلى الشكل القياسي للصيغة Standard Form، وذلك كالتالي [Winston, 2004]:

١- إذا لم يكن الجانب الأيمن موجباً لأي قيد فيجب تحويله إلى موجب بضرب القيد في 1-.

٢- تحويل القيود ذات الاتجاه أصغر من أو يساوي (الجانب الأيسر أصغر من أو يساوي الجانب الأيمن) إلى معادلة، وذلك بإضافة متغير مكمل S_i (Slack Variable) إلى الجانب الأيسر، حيث $(S_i \geq 0)$ و(i) تمثل رقم القيد.

٣- تحويل القيود ذات الاتجاه أكبر من أو يساوي إلى معادلة، وذلك بطرح متغير مكمل S_i من الجانب الأيسر، حيث $(S_i \geq 0)$ و(i) تمثل رقم القيد.

٤- إضافة المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف بمعاملات تساوي صفر.

إن الهدف من تحويل الصيغة الرياضية لمسألة البرمجة الخطية إلى الشكل القياسي هو لإيجاد ما يمكن أن يكون حلاً أوليًا ممكنًا ((Initial Basic Feasible Solution (IBFS))، وهذا الحل الأولي هو النواة الأساسية لإيجاد الحل الأمثل إن وُجد.

نلاحظ أن عدد المتغيرات n (متغيرات القرار والمتغيرات المكملة) أكبر من، أو تساوي عدد القيود m ، أي أن $(n \geq m)$ ، مما يعني أن عدد الحلول الممكنة يساوي $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ فكلما زاد عدد المتغيرات زاد عدد الحلول الممكنة لكن استخدام السمبلكس يساعد على تخفيض عدد الحلول الممكنة بشكل كبير جداً (حيث يتم اختيار أفضل نقطة من بين مجموعة نقاط ركنية متجاورة)، وهذه إحدى مزايا السمبلكس.

و هناك حالتان لحل مسائل البرمجة الخطية باستخدام السمبلكس:

الحالة الأولى: وتستخدم عندما تكون كل القيود متراجحات وذات اتجاه أصغر من أو يساوي والجانب الأيمن موجب أو يساوي صفر.

مسألة (١ , ٤). يمكن استخدام طريقة السمبلكس (تطبيق على الحالة الأولى) لحل الصيغة الرياضية التالية:

Max $z = 6X_1 + 4X_2$

ST

$$2X_1 + 2X_2 \leq 16$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$3X_1 + 3X_2 \leq 18$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

لتحويل هذه الصيغة إلى الشكل القياسي:

١-نضيف متغير مكمل S_1 إلى القيد الأول، فيتحول إلى معادلة، ويصبح كالتالي:

$$2X_1 + 2X_2 + S_1 = 16$$

٢-نضيف متغير مكمل S_2 إلى القيد الثاني، فيتحول إلى معادلة، ويصبح كالتالي:

$$X_1 + 3X_2 + S_2 = 12$$

٣-نضيف متغير مكمل S_3 إلى القيد الثالث، فيتحول إلى معادلة، ويصبح كالتالي:

$$3X_1 + 3X_2 + S_3 = 18$$

٤- نضيف المتغيرات المكملة S_i إلى قيد عدم السلبية فيكون كالتالي:

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

٥-نضيف المتغيرات المكملة Si بمعاملات تساوي صفر إلى دالة الهدف، فتكون دالة الهدف كالتالي:

$$\text{Max } z = 6X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ما هي عناصر جداول السمبلكس؟

يتكون جدول السمبلكس من نوعين من المتغيرات، المتغيرات الأساسية (Basic Variables) ، والمتغيرات غير الأساسية (Nonbasic Variables). تأخذ المتغيرات الأساسية معاملاً قيمته (+١) في أحد القيود وصفرًا في باقي القيود بحيث يكون هناك متغيرًا أساسيًا واحد لكل قيد، وقيمة هذا المتغير الأساسي تساوي الجانب الأيمن عندما يكون معامله في ذلك القيد يساوي (+١)، ويكون أساسياً في ذلك القيد. وتمثل المتغيرات الأساسية مصفوفة الوحدة في جدول السمبلكس، وهي مصفوفة مربعة (m×m) حيث m تساوي عدد القيود. أما المتغيرات غير الأساسية فإن قيمتها تساوي الصفر وتمثل بمصفوفة (m×n-m).

ويتكون جدول السمبلكس (من اليسار إل اليمين) من عمود يمثل المتغيرات الأساسية (BV)، وعمود يمثل معاملات هذه المتغيرات الأساسية في دالة الهدف (BC)، وعمود لكل متغير، وعمود يمثل قيم الجانب الأيمن (RHS)، وأخيراً عمود يمثل النسبة (Ratio). وللتطبيق مباشرة للمسألة السابقة بعد تحويلها إلى الشكل القياسي، نبدأ بملء الجدول الأول للسمبلكس (جدول ٤-١) ببيانات الشكل القياسي السابق كالتالي مع ملاحظة أن الصف أعلى الجدول يمثل معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

جدول رقم (١ , ٤). يوضح معاملات المتغيرات في الجدول الأول للسمبلكس بعد تحويله إلى الشكل القياسي.

		06	04	0	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	2	2	1	0	0	16	
0	S_2	1	3	0	1	0	12	
0	S_3	3	3	0	0	1	18	

بعد ملء الجدول رقم (١ , ٤) ببيانات الشكل القياسي لمسألة البرمجة الخطية السابقة، نلاحظ أن المتغيرات الأساسية هي (S_1, S_2, S_3)، وهي التي تُكون مصفوفة الوحدة والمتغيرات غير الأساسية هي (X_1, X_2)، ونلاحظ كذلك أن عدد المتغيرات الأساسية يساوي عدد القيود. نقوم الآن بإضافة صفين إضافيين للجدول يمثل الأول (و الذي يرمز له بالرمز (Zj)) القيمة المستهلكة من منفعة هذا المتغير في هذه المرحلة من الحل. فإذا كان هذا المتغير أساسياً فإنه يكون قد استهلك منفعته بالكامل، ولهذا يأخذ نفس قيمة معامله في دالة الهدف، أما إذا كان هذا المتغير غير أساسي فإن الكمية المستهلكة من منفعته تكون بمقدار دعمه لدالة الهدف والناتجة من تضحيته ببعض الموارد لصالح المتغيرات الأساسية.

والصف الآخر ويرمز له بالرمز ($Cj-Zj$)، حيث Cj تمثل قيمة معامل المتغير (j) في دالة الهدف، وتمثل ($Cj-Zj$) المنفعة المفقودة لهذا المتغير. فإذا كان المتغير أساسياً فإن المنفعة المفقودة تساوي صفراً دائماً؛ وذلك لأن منفعته تكون قد استهلكت بالكامل. أما إذا كان المتغير غير أساسي فلدينا ثلاث حالات في الصف $Cj-Zj$: ١) أن يكون لدينا منفعة مفقودة يمكن الاستفادة منها لتحسين الحل (قيمة موجبة في حالة Max وسالبة في حالة Min)، وبالتالي يكون هذا المتغير مؤهل للتحول إلى متغير أساسي، ٢) أن تكون منفعته المفقودة تساوي صفراً، حيث إن منفعته قد أُستُهلِكت بالكامل، وبذلك تحويله إلى متغير أساسي لن يفيد أو يحسن في قيمة دالة الهدف (مع إمكانية تحويله)، ٣) أن تتحول المنفعة المفقودة إلى ضرر غير مستخدم (قيمة سالبة في حالة Max وموجبة في حالة Min)؛ نتيجةً لأن هذا المتغير سيشارك متغيراً أساسياً آخر في نفس الموارد، ولهذا فإن تحويل هذا المتغير إلى متغيرٍ أساسي سيضر قيمة دالة الهدف.

و لحساب قيم الصف Zj نضرب قيم BC بمعامل المتغير j في كل صف ثم نجمع نتيجة عملية الضرب في كل الصفوف لنحصل على قيمة Z للمتغير j. كمثال على ذلك في الجدول (٢ , ٤) لنأخذ قيمة Z للعمود الأول والناتجة من العملية التالية:

$$Z_{(X1)} = [(0 \times 2) + (0 \times 1) + (0 \times 3)] = 0$$

		6
BC	BV	X_1
0	S_1	C
0	S_2	1
0	S_3	3
المجموع	Zj	0

حيث إن معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف تمثل متجه صفي (1×m)، ومعاملات المتغير في القيد يمثل متجه عمودي (m×1) وعند ضرب المصفوفتين نحصل على قيمة Z للمتغير.

جدول رقم (٢ , ٤). يوضح بيانات صف (Zj) وصف (Cj-Zj) في الجدول الأول للسمبلكس.

		6	4	0	0	0		
BC	BV	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
0	S_1	2	2	1	0	0	16	
0	S_2	1	3	0	1	0	12	
0	S_3	3	3	0	0	1	18	
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj	6	4	0	0	0		

لاحظ أن الخلية المحاطة بمربع، وتمثل تقاطع عمود الجانب الأيمن وصف Zj تمثل قيمة دالة الهدف والتي يتم حسابها بضرب قيم BC بقيم الجانب الأيمن في كل صف، ثم نجمع نتيجة عملية الضرب في كل الصفوف لنحصل على قيمة Z أو دالة الهدف للمرحلة ككل. كمثال على ذلك، تم حساب قيمة دالة الهدف للجدول (٢ , ٤) كالتالي:

$$Z = [(0 \times 16) + (0 \times 12) + (0 \times 18)] = 0$$

في هذا الجدول (جدول رقم (٢ , ٤) نجد أن قيم (Cj-Zj) للمتغيرات الأساسية تساوي صفراً حيث إن المنفعة لهذا المتغير قد استهلكت بالكامل بمجرد تحوله إلى متغير أساسي. أما بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية فإن قيم (Cj-Zj) أكبر من الصفر (وهي إحدى الحالات الممكنة الحدوث)؛ وذلك لأن المنفعة لم تستهلك بالكامل. لتوضيح ذلك، نلاحظ أن قيمة (Cj-Zj) للمتغير S_1 تساوي الصفر؛ وذلك لأنه متغير أساسي في هذه المرحلة؛ ولهذا فقد استنفد منفعته، أما بالنسبة للمتغير X_1 فإنه متغير غير أساسي؛ ولأنه لم يتم إنتاج أي شيء في هذه المرحلة حيث إن متغيرات القرار X_1 وX_2 متغيرات غير أساسية، فإن قيمة $Z_{(X1)}$ تساوي الصفر، وقيمة $(Cj\text{-}Zj)_{(X1)}$ تساوي ٦ والناتجة من طرح $Z_{(X1)}$من معامل X_1 في دالة الهدف.

هل هناك فرصة لتحسين الحل؟

في المرحلة السابقة كانت قيم دالة الهدف تساوي الصفر، وقيمة متغيرات القرار X_1 وX_2 تساويان الصفر حيث إنهما متغيران غير أساسيين وقيمة المتغيرات المكملة S_1 وS_2 وS_3 هي ١٦ و١٢ و١٨ على التوالي إذ أن هذه المتغيرات متغيرات أساسية. وهذا الحل في المرحلة السابقة هو حل ممكن؛ لأنه يمثل إحدى النقاط الركنية في منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region)، ويجب البحث عن نقطة ركنية أفضل إن أمكن، ويتم ذلك بالبحث عن متغير غير أساسي يمكن تحويله لمتغير أساسي، ويُسمى المتغير الداخل Entering Variable بشرط أن تكون منفعته المفقودة (Cj-Zj) أكبر قيمة موجبة؛ (لأن دالة الهدف Max) حتى تكون قيمة التحسن في دالة الهدف أكبر ما يمكن نتيجةً لهذا التحويل. وحيث إن عدد المتغيرات الأساسية يجب أن يساوي عدد القيود فيجب تحويل أحد المتغيرات الأساسية إلى متغير غير أساسي، ويسمى المتغير الخارج Exiting Variable ليحل محله المتغير الداخل. [Taylor III, 2010] و[Gould et al, 1991] و [Winston, 2004].

قاعدة (١ , ٤):

في حالة Max: المتغير الداخل هو المتغير غير الأساسي الذي تكون قيمة (Cj-Zj) له أكبر قيمة موجبة

في حالة Min: المتغير الداخل هو المتغير غير الأساسي الذي تكون قيمة (Cj-Zj) له أصغر قيمة سالبة

من الجدول رقم (٢ , ٤) نلاحظ أن أكبر قيمة موجبة لقيم (Cj-Zj) للمتغيرات غير الأساسية هي للمتغير X_1 ولهذا فإن هذا المتغير هو المتغير الداخل (المنتقل من حالة أن يكون متغيراً غير أساسي إلى متغيرٍ أساسي).

و لتحديد المتغير الخارج فإننا نأخذ أصغر نسبة والناتجة من قسمة الجانب الأيمن في كل صف (قيد) على معامل المتغير الداخل لنفس القيد، وهنا نجد أن أصغر نسبة هي للصف الثالث، ولذلك فالمتغير الخارج هو S_3. ولتعليل اختيار أصغر نسبة لتحديد المتغير الخارج يمكن لنا العودة مرةً أخرى إلى القيود، ونحدد أكبر قيمة يمكن أن يأخذها المتغير الداخل X_1 بحيث يُكبِّر قيمة دالة الهدف بأقصى قدر ممكن؛ لأن المسألة Max. من القيد الأول:

$$2X_1 + 2X_2 + S_1 = 16$$

لو تركز الإنتاج كله على X_1 مع بقاء $(X_2 = 0)$ فإن قيمة $X_1 = 8$ ، أما بالنسبة للقيد الثاني:

$$X_1 + 3X_2 + S_2 = 12$$

فلو تركز الإنتاج كله على X_1 مع بقاء $(X_2 = 0)$ فإن قيمة $X_1 = 12$ ، أما بالنسبة للقيد الثالث:

$$3X_1 + 3X_2 + S_3 = 18$$

فلو تركز الإنتاج كله على X_1 مع بقاء $(X_2 = 0)$ فإن قيمة $X_1 = 6$.

هنا نجد أنفسنا أمام ثلاثة خيارات لقيم X_1 فلو اخترنا $(X_1 = 8)$ ، فإن هذه القيمة بعد تعويضها في القيود لن تخالف القيد الأول، ولن تخالف القيد الثاني، ولكن في القيد الثالث فإن قيمة الجانب الأيمن سيصبح أكبر من ١٨ ، مما يعني مخالفة القيد الثالث مع الأخذ في الاعتبار أن قيمة المتغير المكمل $S_i \geq 0$. ولو اخترنا $(X_1=12)$ فإن هذه القيمة بعد التعويض ستخالف القيد الأول والثالث. وأخيراً لو اخترنا $(X_1=6)$ وعوضناها في القيود الثلاثة فإن هذه القيمة لن تخالف أي قيد. هنا نلاحظ أن اختيارنا تركز على أصغر قيمة لقيم X_1، والناتج من قسمة الجانب الأيمن على معامل X_1، مما يعني أننا دائماً نختار أصغر نسبة.

لكن يجب ملاحظة أنه إذا كان معامل المتغير الداخل سالباً أو صفراً، فإن النسبة في السمبلكس تكون غير مقبولة Unacceptable، (ويرمز لها بالرمز UNA) وإن كانت رياضياً مقبولة، لماذا؟ (التعليل سيظهر عندما نتحدث عن الحل غير المحدد).

قاعدة (٢ , ٤):

إذا كان معاملات المتغير الداخل سالبة أو صفراً، فإن النسب تكون غير مقبولة في طريقة السمبلكس. [Winston, 2004]

جدول رقم (٣ , ٤). يوضح عنصر الارتكاز .

		6	4	0	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	2	2	1	0	0	16	16/2=8
0	S_2	1	3	0	1	0	12	12/1=12
0	S_3	3	3	0	0	1	18	18/3=6 →
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj	6 ↑	4	0	0	0		

هنا في الجدول رقم (٣ , ٤) يلاحظ أن عنصر الارتكاز (تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج) هو معامل X_1 في الصف الثالث، وهو القيمة (3+) وبجعل X_1 متغيراً أساسياً فلابد أن تكون معاملاتها عناصر في مصفوفة الوحدة، وتأخذ الترتيب التالي في هذه المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$، وهو نفس ترتيب عناصر المتغير S_3، وسيحل المتغير X_1 محل المتغير S_3 وتصبح المتغيرات الأساسية هي (S_1, S_2, X_1)، وهي التي تُكوَن مصفوفة الوحدة والمتغيرات غير الأساسية هي (X_2, S_3). ولعمل هذا الإحلال لابد أن يكون معامل المتغير X_1 يساوي ١ في الصف الثالث؛ لأنه أصبح أساسياً فيه، وصفراً في باقي الصفوف، وذلك باستخدام أي طريقة رياضية، ومنها طريقة عملية الصفوف Row Operations.

كيف تعمل عملية الصفوف:

تتم عملية الصفوف بالشكل التالي: لو قسمنا عناصر الصف الثالث على (3)، وهو عنصر الارتكاز الذي يمثل تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج لتكوّن لنا الصف الثالث الجديد، كما يظهر في الجدول رقم (٤ , ٤):

جدول رقم (٤ , ٤). يوضح الصف الثالث الجديد في الجدول الثاني والذي يتضمن عنصر الارتكاز.

		6	4	0	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1							
0	S_2							
6	X_1	1	1	0	0	1/3	6	
	Zj							
	Cj-Zj							

ولأن معامل X_1 في الصف الأول٢، فنقوم بضرب عناصر الصف الثالث الجديد في (-2)، وإضافته إلى عناصر الصف الأول القديم لنحصل على الصف الأول الجديد الذي يكون فيه معامل X_1 يساوي صفراً كالتالي:

BV	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
الصف الأول القديم (جدول ٣ , ٤)	2	2	1	0	0	16
بالجمع (+)						
صف عنصر الارتكاز الجديد مضروباً في -٢	-2	-2	0	0	-2/3	-12
الصف الأول الجديد جدول (٥ , ٤)	0	0	1	0	-2/3	4

ولأن معامل X_1 في الصف الثاني ١ فسنقوم بنفس الطريقة بضرب عناصر الصف الثالث الجديد في (-1)، وإضافته إلى عناصر الصف الثاني القديم لنحصل على الصف الثاني الجديد، وفيه معامل X_1 يساوي صفراً. وبحساب قيم Zj وCj-Zj نحصل على الجدول الجديد (٥ , ٤) الذي يمثل المرحلة الثانية. كما يجب ملاحظة أنه يمكن اختصاراً للوقت إسقاط معاملات المتغيرات الأساسية الأخرى S_1 وS_2 كما هـــي في جدول رقم (٣ , ٤) بدون أي تغيير حيث إنها لن تتأثر بهذه العملية، لماذا؟

جدول رقم (٥ , ٤). يوضح الجدول الثاني كاملاً بعد تطبيق عملية الصفوف.

BC	BV	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
		6	4	0	0	0		
0	S_1	0	0	1	0	-2/3	4	
0	S_2	0	2	0	1	-1/3	6	
6	X_1	1	1	0	0	1/3	6	
	Zj	6	6	0	0	2	36	
	Cj-Zj	0	-2	0	0	-2		

نلاحظ هنا في الجدول ٤-٥ أن قيمة دالة الهدف Z زادت وأصبحت ٣٦ ، مما يؤكد تحسن الحل بتحول X_1 إلى متغير أساسي، ويلاحظ كذلك أن قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية قيمًا سالبة، مما يدل على أننا وصلنا إلى الحل الأمثل الوحيد، وهو $Z = 36, X_1 = 6, X_2 = 0, S_1 = 4, S_2 = 6, S_3 = 0$.

ونتيجةً لأن المتغير المكمل $S_3 = 0$ فإن القيد الثالث هو القيد النشط ACTIVE CONSTRAINT والذي تقع عليه نقطة الحل الأمثل.

قاعدة (٣ , ٤):

في حالة Max (Min):

إذا كانت قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية سالبة (موجبة)، فالحل الحالي هو الحل الأمثل، وهو حل وحيد Unique Optimal Solution.

إذا كانت قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية سالبة (موجبة) وأحدها على الأقل صفراً، فالحل الحالي هو الحل الأمثل، ولكن ليس الحل الوحيد (هناك حل آخر لا تتغير فيه قيمة دالة الهدف، ولكن تتغير قيم المتغيرات) Alternative (Multiple) Optimal Solution.

قيم Cj-Zj للمتغيرات الأساسية تساوي الصفر دائماً.

لقد تمكنا من حل هذه المسألة والحصول على الحل الأمثل بعمل جدولين فقط كالتالي:

جدول رقم (٦ , ٤). يوضح الجدول الأول للمسألة السابقة.

		6	4	0	0	0		
BC	**BV**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	2	2	1	0	0	16	
0	S_2	1	3	0	1	0	12	
0	S_3	3	3	0	0	1	18	
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj	6	4	0	0	0		

جدول (٧ , ٤). يوضح الجدول الثاني والأخير للمسألة السابقة والحصول على الحل الأمثل.

		6	4	0	0	0		
BC	**BV**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	0	0	1	0	-2/3	4	
0	S_2	0	2	0	1	-1/3	6	
6	X_1	1	1	0	0	1/3	6	
	Zj	6	6	0	0	2	36	
	Cj-Zj	0	-2	0	0	-2		

الحالة الثانية: تستخدم عندما تحتوي الصيغة الرياضية على متراجحة واحدة على الأقل ذات اتجاه أكبر من، أو يساوي والجانب الأيمن موجب، أو معادلة واحدة على الأقل، وهناك طريقتان لحل عذا النوع من المسائل وهما طريقة M الكبيرة Big M Method وطريقة المرحلتين Two-Phase Method. سنركز هنا على طريقة M الكبيرة. [Bazaraa et al, 1990] و[Winston, 2004].

طريقة M الكبيرة:

في هذه الحالة لا نكتفي بطرح متغير مكمل من قيد المتراجحة ذات الاتجاه أكبر من، أو يساوي لتحويله إلى معادلة عند كتابة الشكل القياسي للصيغة الرياضية، بل نضيف ما يُسمى بالمتغير الاصطناعي Artificial Variable؛ وذلك لأن معامل المتغير المكمل ستكون إشارته سالبة، ولذلك لا يصلح أن يكون عنصراً من عناصر مصفوفة الوحدة، ولذلك فسنحتاج إلى متغيرٍ آخر، وهو المتغير الاصطناعي ومعامله موجب ١ لنتمكن من الحصول على هذه المصفوفة، ويكون هذا المتغير متغيراً أساسياً في الحل الأولي للمسألة. لكن لأن هذا المتغير الاصطناعي ليس له مكان حقيقي في المسألة، وإنما وُجد لإيجاد حل أولي يمكن من خلاله الوصول إلى الحل النهائي، فإننا لابد أن نحرص على التخلص منه في أثناء مراحل الحل. ولتحقيق ذلك فإننا في حالة Min نجعل المتغير الاصطناعي أحد عناصر دالة الهدف، وبمعامل كبير جداً وموجب؛ وذلك للضغط على المسألة لمحاولة التخلص من المتغير الاصطناعي بأسرع ما يمكن، حيث إن المتغير الاصطناعي سيكون متغيراً أساسياً وقيمته موجبة، ولذلك عند ضربه بهذا الرقم الكبير جداً والموجب فإن قيمة دالة الهدف ستكون كبيرة جداً، مما يعارض مبدأ التخفيض وعندئذٍ سيكون من أولويات المسألة التخلص من هذا المتغير الاصطناعي؛ لأن في التخلص منه نحصل على أكبر تخفيض. وهذا الرقم الكبير (معامل المتغير الاصطناعي) يرمز له بالرمز M ويكون موجباً إذا كانت المسألة Min ، وسالباً إذا كانت المسألة Max، ومن هنا جاءت التسمية (طريقة M الكبيرة).

قاعدة (٤ , ٤):

إذا كانت المسألة Minimization فإن معامل المتغير الاصطناعي في دالة الهدف تساوي +M

إذا كانت المسألة Maximization فإن معامل المتغير الاصطناعي في دالة الهدف تساوي –M

أما إذا كان القيد على شكل معادلة، فإننا لا نحتاج إلى متغير مكمل، ولكن سنحتاج إلى متغير اصطناعي ليكون هو المتغير الأساسي في هذا القيد إلا إذا وإذا فقط كان في هذا القيد والذي

هو على شكل معادلة متغير قرار لا يوجد إلا في هذا القيد وكان معامله موجباً والجانب الأيمن للقيد موجباً أو معامله سالباً والجانب الأيمن للقيد سالباً عندئذٍ يكون هذا المتغير أساسياً بعد تحويل معامله إلى موجب إن لم يكن كذلك، وقسمة طرفي القيد على معامل هذا المتغير إن لم يكن معامله يساوي ١.

قاعدة (٥ , ٤): (حالة خاصة)

إذا كان القيد معادلة فإننا لا نحتاج إلى متغير اصطناعي إذا كان في هذا القيد متغير قرار غير موجود في القيود الأخرى وإشارة معامله نفس إشارة الجانب الأيمن. كما يمكن استخدام المتغير الاصطناعي في هذه الحالة، ولكن قد تزيد مراحل الحل.

مسألة (٢ , ٤) على طريقة السمبلكس باستخدام M الكبيرة:

لنأخذ مسألة Minimization التالية:

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = 6X_1 + X_2 + 3X_3 - 2X_4 \\ &\text{S.T.} \\ &\quad X_1 + X_2 \leq 42 \\ &\quad 2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 \geq 10 \\ &\quad X_1 + 2X_3 + X_4 = 30 \\ &\quad X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

لتحويل هذه الصيغة إلى الشكل القياسي للصيغة الرياضية للبرمجة الخطية:

١)نضيف متغير مكمل S_1 إلى القيد الأول فيتحول إلى معادلة ويصبح كالتالي:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 42$$

٢)نطرح متغير مكمل S_2 من القيد الثاني، فيتحول إلى معادلة ونضيف متغيرًا اصطناعيًّا A_2 إلى القيد الثاني، ويصبح كالتالي:

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 - S_2 + A_2 = 10$$

٣)نضيف متغيرًا اصطناعيًّا A_3 إلى القيد الثالث فيصبح كالتالي:

$$X_1 + 2X_3 + X_4 + A_3 = 30$$

٤)نضيف المتغيرات المكملة S_i والمتغيرات الاصطناعية A_i إلى قيد عدم السلبية فيكون كالتالي:

$$X_1, X_2, X_3, X_{4,} S_1, S_2, A_2, A_3 \geq 0$$

٥)نضيف المتغيرات المكملة S_i بمعاملات تساوي صفر إلى دالة الهدف والمتغيرات الاصطناعية A_i بمعاملات تساوي M+ (حيث M رقم كبير جداً)، فتكون دالة الهدف كالتالي:

$$\text{Min } w = 6X_1 + X_2 + 3X_3 - 2X_4 + 0S_1 + 0S_2 + MA_2 + MA_3$$

ويكون الجدول الأول كالتالي (جدول رقم (٨ , ٤):

جدول رقم (٨ , ٤). يوضح الجدول الأول للسمبلكس للمسألة (٢ , ٤).

		6	1	3	-2	0	0	M	M		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**A_2**	**A_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	1	1	0	0	1	0	0	0	42	42
M	A_2	2	3	-1	-1	0	-1	1	0	10	10/3 →
M	A_3	1	0	2	1	0	0	0	1	30	UNA
	Zj	3M	3M	M	0	0	-M	M	M	40M	
Cj- Zj		6-3M	1-3M	3-M	-2	0	M	0	0		
				↑							

نلاحظ في هذا الجدول رقم (٨ , ٤) أن قيمة دالة الهدف 40M، مما يعني أن هذا الحل غير مقبول وهو خارج منطقة الحلول الممكنة لوجود متغيرات اصطناعية كمتغيرات أساسية، ولهذا لابد من التخلص منها على أمل أن يتجه الحل باتجاه منطقة الحلول الممكنة، ولن يتحقق ذلك إلا بالتخلص من المتغيرات الاصطناعية. بما أن قيمة Cj-Zj للمتغير X_2 هي أصغر قيمة سالبة، فإن المتغير الداخل هو X_2، والمتغير الخارج هو A_2؛ لأن أقل نسبة موجودة في القيد الثاني، ولذلك يمكن لنا الانتقال إلى الجدول التالي بعد التخلص من المتغير الاصطناعي A_2 الذي لن يعود مطلقاً، كما يمكن أن نتوقع انخفاضاً كبيراً في قيمة دالة الهدف.

قاعدة (٦ , ٤):

جميع المتغيرات يمكن لها الخروج والدخول في جميع مراحل الحل إلا المتغير الاصطناعي، فإنه إذا خرج فلن يعود مرة أخرى وبالتالي يمكن حذفه من الجدول التالي. انظر [Bazaraa et al, 1990] و[Winston, 2004] و[Render et al., 2003].

يلاحظ أن عنصر الارتكاز هو معامل X_2 في الصف الثاني وهو القيمة (3+) وجعل X_2 متغيراً أساسياً فلابد أن تكون معاملاتها عناصر في مصفوفة الوحدة وتأخذ الترتيب التالي في هذه المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ولعمل ذلك فلابد من قسمة معامل X_2 في الصف الثاني على (3+) لنحصل على القيمة (1+)، ولذلك يجب قسمة الصف الثاني كاملاً على (3+)، كما يظهر في الجدول رقم (٩ , ٤). كما يجب أن يكون معامل X_2 في الصف الأول والثالث صفراً، ولعمل ذلك نضرب الصف الثاني بعد قسمته على (3+) في (1-)؛ (لأن معامل X_2 في الصف الأول + ١ كما في الجدول رقم (٨ , ٤)، وجمعه مع الصف الأول في الجدول ٤–٨ لنحصل على الصف الأول في الجدول (٩ , ٤). أما بالنسبة للصف الثالث فيبقى كما هو؛ لأن معامل X_2 في هذا الصف صفر، كما في الجدول رقم (٨ , ٤).

جدول رقم (٩ , ٤). يوضح الجدول الثاني للمسألة (٢ , ٤).

		6	1	3	-2	0	0	M		
BC	BV	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	A_3	RHS	Ratio
0	S_1	1/3	0	1/3	1/3	1	1/3	0	116/3	116
1	X_2	2/3	1	-1/3	-1/3	0	-1/3	0	10/3	UNA
M	A_3	1	0	2	1	0	0	1	30	15 →
	Zj	2/3+M	1	-1/3+2M	-1/3+M	0	-1/3	M	10/3+30M	
Cj- Zj		16/3-M	0	10/3-2M	-5/3-M	0	1/3	0		
				↑						

يلاحظ في الجدول رقم (٩ , ٤) الانخفاض الكبير أيضاً في قيمة دالة الهدف من (40M) إلى (30M+10/3)، وهذا يُعزى إلى خروج A_2. بما أن قيمة Cj-Zj للمتغير X_3 هي أصغر قيمة سالبة، فإن المتغير الداخل هو X_3، والمتغير الخارج هو A_3 ؛ لأن أقل نسبة موجودة في القيد الثالث، ولهذا يمكن لنا الآن الانتقال إلى الجدول رقم (١٠ , ٤) بعد التخلص من المتغير الاصطناعي A_3 الذي لن يعود مطلقاً. كما يمكن أن نتوقع انخفاضاً كبيراً في قيمة دالة الهدف كما في الجدول رقم (٩ , ٤). يلاحظ أن عنصر الارتكاز هو معامل X_3 في الصف الثالث، وهو القيمة (2+) التي يجب قسمتها على (2+) لنحصل على القيمة (1+)، وهنا يجب قسمة الصف الثالث كاملاً على (2+). كما يجب أن يكون معامل X_3 في الصف الأول والثاني صفراً. ولعمل ذلك نضرب عناصر الصف الثالث بعد قسمته على (2+) في (1/3-)؛ (لأن معامل X_3 في الصف الأول 1/3+ للجدول رقم (٩ , ٤) وجمعه مع عناصر الصف الأول في الجدول رقم (٩ , ٤) لنحصل على الصف الأول في الجدول رقم (١٠ , ٤). كما نضرب

عناصر الصف الثالث بعد قسمته على (2+) في (1/3+)، وجمعه مع عناصر الصف الثاني في الجدول رقم (٩ , ٤) لنحصل على الصف الثاني في الجدول رقم (١٠ , ٤).

جدول رقم (١٠ , ٤). الجدول الثالث للمسألة رقم (٢ , ٤).

		6	1	3	-2	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	1/6	0	0	1/6	1	1/3	101/3	202
1	X_2	5/6	1	0	-1/6	0	-1/3	25/3	UNA
3	X_3	1/2	0	1	1/2	0	0	15	30
	Zj	14/6	1	3	8/6	0	-1/3	160/3	
Cj- Zj		22/6	0	0	-20/6	0	1/3		

يلاحظ في الجدول رقم (١٠ , ٤) الانخفاض الكبير في قيمة دالة الهدف من (30M+10/3) إلى (160/3)، وهذا يعود إلى خروج A_3 كما حدث في الجدول رقم (٩ , ٤). نلاحظ هنا أننا دخلنا منطقة الحلول الممكنة، وهو أول دخول لنا بعد أن تخلصنا من المتغيرات الإصطناعية. بما أن قيمة Cj-Zj للمتغير X_4 هي أصغر قيمة سالبة فإن المتغير الداخل هو X_4، والمتغير الخارج هو X_3 ؛ لأن أقل نسبة موجودة في القيد الثالث، ولذلك يمكن لنا الآن الانتقال إلى الجدول رقم (١١ , ٤) بعد إخراج X_3، كما يمكن أن نتوقع تحسناً في قيمة دالة الهدف. يلاحظ أن عنصر الارتكاز هو معامل X_4 في الصف الثالث، وهو القيمة (1/2+) التي يجب ضربها في (2+) لنحصل على القيمة (1+)، ولذلك يجب ضرب الصف الثالث كاملاً في (2+). كما يجب أن يكون معامل X_4 في الصف الأول والثاني صفراً،

جدول رقم (١١ , ٤). الحل الأمثل للمسألة رقم (٢ , ٤).

		6	1	3	-2	0	0	
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**RHS**
0	S_1	0	0	-2/6	0	1	1/3	86/3
1	X_2	1	1	2/6	0	0	-1/3	40/3
-2	X_4	1	0	2	1	0	0	30
	Zj	-1	1	-22/6	-2	0	-1/3	-140/3
Cj- Zj		7	0	40/6	0	0	1/3	

ولعمل ذلك نضرب جميع عناصر الصف الثالث بعد ضربها في (2+) في (1/6-) ، وجمعها مع عناصر الصف الأول في الجدول رقم (١٠ , ٤)؛ وذلك للحصول على الصف الأول في الجدول رقم

(١١ , ٤). كما نضرب عناصر الصف الثالث بعد ضربها في (2+) في (1/6)، وجمعها مع عناصر الصف الثاني في الجدول رقم (١٠ , ٤) لنحصل على الصف الثاني في الجدول رقم (١١ , ٤).

من الجدول رقم (١١ , ٤) نجد أن قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية كلها موجبة، مما يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل وهو حل وحيد. الحل الأمثل هو $Z = -140/3, X_1 = 0, X_2 = 40/3,$ $X_3 = 0, X_4 = 30$.

متى تكون المسألة غير محددة الحل Unbounded ؟

تكون المسألة غير محددة الحل إذا كان هناك متغير داخل وكانت جميع معاملات هذا المتغير الداخل في المرحلة التي يمكن له الدخول فيها أصغر من أو تساوي صفراً، أو يمكن التعبير عنها بأن المسألة تكون غير محددة الحل إذا كانت النسب كلها غير مقبولة. كمثال على ذلك لنفرض أن لدينا الجدول التالي (١٢ , ٤) في حالة Max:

جدول رقم (١٢ , ٤). يوضح حالة المسألة غير محددة الحل.

		9	6	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**RHS**	**Ratio**
9	X_1	1	-1/3	1/3	0	10	UNA
0	S_2	0	-3	-1/2	1	12	UNA
	Zj	9	-3	3	0	90	
Cj-Zj		0	9	-3	0		

نجد في هذه المسألة أن الحل يمكن تحسينه عند إدخال المتغير X_2، ولكن لا يمكن أن نخرج أي متغير أساسي لنفسح المجال للمتغير الداخل X_2. ولتعليل ذلك نجد أنه إذا أردنا زيادة قيمة المتغير X_2 ليصبح قيمة موجبة (بسبب شرط عدم السلبية)، فإن المتغيرات الأساسية الحالية (X_1,S_2) ستتغير كالتالي:

$$X_1 - 1/3X_2 = 10 \quad ===== \rightarrow \quad X_1 = 10 + 1/3X_2$$

مما يعني أنه كلما زاد X_2 فإن X_1 تزداد كذلك بدلاً من أن تتجه إلى الصفر، ولو نظرنا إلى المعادلة التالية لوجدنا نفس العلاقة تحدث، ولكن مع المتغير الأساسي الآخر S_2، والنتيجة هي نفسها.

$$S_2 - 3X_2 = 12 \quad ===== \rightarrow \quad S_2 = 12 + 3X_2$$

من هنا نلاحظ أنه كلما زادت X_2، فإن المتغيرات الأساسية الأخرى ستتزايد، ولن تتجه إلى الصفر، وهذا سيؤدي إلى تزايد دالة الهدف إلى مالا نهاية.

أما إذا كان معامل X_2 صفراً فإنه بقسمة الجانب الأيمن على صفر نحصل على قيمة غير معرفة وهذا يعني أن قيمة المتغير الداخل ستؤول إلى ما لانهاية في السمبلكس، وهنا أيضاً فإن قيمة دالة الهدف تتزايد إلى مالا نهاية والحل غير محدد أيضاً.

قاعدة (٧ , ٤):

يكون الحل غير محددٍ إذا كانت معاملات المتغير الداخل سالبةً، أو صفراً، أو بمعنى آخر إذا كانت جميع النسب غير مقبولة (UNA). [Winston, 2004]

متى تكون المسألة غير ممكنة الحل Infeasible ؟

تكون المسألة غير ممكنة الحل إذا لم نستطع التخلص من المتغيرات الاصطناعية بمعنى أنه إذا كنا لا نستطيع إدخال أي متغير غير أساسي؛ لأن قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية كلها سالبة في حالة Max أو كلها موجبة في حالة Min، وكان لا يزال لدينا متغير اصطناعي واحد (على الأقل) كمتغير أساسي، ولم نستطع التخلص منه فإن المسألة تكون غير ممكنة الحل. كمثال على ذلك لنفرض أن لدينا الجدول التالي رقم (١٣ , ٤) في حالة Max:

جدول رقم (١٣ , ٤). يوضح دخول متغير وخروج آخر في مرحلة من مراحل السمبلكس.

		4	5	0	0	-M		
BC	BV	X_1	X_2	S_1	S_2	A_2	RHS	Ratio
0	S_1	2	4	1	0	0	8	2
-M	A_2	1	3	0	-1	1	9	3
	Zj	-M	-3M	0	M	-M	-9M	
Cj-Zj		4+M	5+3M	0	-M	0		

و بما أن قيمة Cj-Zj للمتغير غير الأساسي X_2 هي أكبر قيمة موجبة، فإن X_2 سوف تدخل وستخرج S_1؛ وذلك بسبب النسبة الأقل وسنحصل على الجدول التالي رقم (١٤ , ٤):

جدول رقم (١٤ , ٤). يوضح عدم وجود متغير داخل في حين وجود متغير اصطناعي كمتغير أساسي.

		4	5	0	0	-M		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_2**	**RHS**	**Ratio**
5	X_2	1/2	1	1/4	0	0	2	2
-M	A_2	-1/2	0	-3/4	-1	1	3	3
	Zj	(5+M)/2	5	(5+3M)/4	M	-M	10-3M	
Cj-Zj		4-(5+M)/2	0	-(5+3M)/4	-M	0		

من الجدول رقم (١٤ , ٤) نجد أن جميع قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية سالبة، مما يدل على أن قيمة دالة الهدف لا يمكن أن تتحسن أكثر من ذلك، ولكن مازال هناك متغير اصطناعي A_2 لم يخرج، ولهذا فإن المسألة غير ممكنة الحل.

قاعدة (٨ , ٤):

تكون المسألة غير ممكنة الحل إذا كانت قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية موجبة في حالة Min ، أو سالبة في حالة Max (لا يوجد متغير داخل)، وكان واحدٌ على الأقل من المتغيرات الأساسية متغيراً اصطناعياً. [Winston, 2004] و[Render et al., 2003].

هل قيد عدم السلبية لازمٌ لحل مسائل البرمجة الخطية؟

إن قيد عدم السلبية لازمٌ لحل مسائل البرمجة الخطية، ولكن قد تكون المسألة تحتوي على متغيرات تعارض هذا القيد، وذلك كالتالي:

١. أن يكون المتغير أصغر من أو يساوي صفراً ======> $(Xj \le 0)$

٢. أن يكون المتغير غير محدد الإشارة unrestricted in sign ======> (Xj : urs)

ولحل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرات تعارض قيد عدم السلبية فلابد من حل هذه التعارض، أولاً وقبل البدء بالحل [Walker, 1999]، ولعمل ذلك لنأخذ المسألة التالية (٣ , ٤):

$$\text{Min } w = X_1 + 12X_2 - 2X_3$$
S.T.
$$4X_1 + 2X_2 + 12X_3 \le 10$$
$$2X_1 - X_2 + 11X_3 \ge -2$$
$$X_1 \le 0,\ X_2: \text{urs},\ X_3 \ge 0$$

و لحل هذه المسألة باستخدام السمبلكس يجب عمل التالي:

١-نحول الجانب الأيمن للقيد الثاني إلى موجب بضرب المتراجحة في (-1).

٢-نفرض أن ($X_1 = -X_4$)؛ فإن ($-X_4 \leq 0$) لكن ($X_4 \geq 0$)، وهنا سنستخدم X_4 بدلاً من X_1 لحل المسألة، ثم بعد حل المسألة نعود، ونعوض بقيمة X_1، وذلك بضرب قيمة X_4 في سالب ١.

٣-نفرض أن ($X_2 = X_5 - X_6$) ونفرض أن ($X_5 \geq 0, X_6 \geq 0$)، ثم بعد حل المسألة نعوض في X_2 فإن كانت ($X_5 > X_6$) فإن X_2 موجبة وإن كانت ($X_5 < X_6$) فإن X_2 سالبة، وإن كانتا متساويتين فإن ($X_2 = 0$).

الآن يمكن إعادة كتابة الصيغة الرياضية كالتالي:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } w = -X_4 + 12X_5 - 12X_6 - 2X_3 \\
&\text{S.T.} \\
&\quad -4X_4 + 2X_5 - 2X_6 + 12X_3 \leq 10 \\
&\quad 2X_4 + X_5 - X_6 - 11X_3 \leq 2 \\
&\quad X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, X_6 \geq 0, X_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

و هنا يمكن حل المسألة بشكل اعتيادي كما عملنا في السابق لكن يجب عدم نسيان إعادة التعويض في المتغيرات الأصلية، أي أن ($X_1 = -X_4$) وأن ($X_2 = X_5 - X_6$).

ما هي حالة التحلل؟

حالة التحلل Degeneracy تحدث عندما يكون عدد المتغيرات الأساسية الموجبة أقل من عدد القيود [Rardin, 1998]، ويمكن إظهار هذا في المسألة التالية (٤ , ٤):

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 5X_1 + 5X_2 \\
&\text{S.T.} \\
&\quad 3X_1 + 3X_2 \leq 15 \\
&\quad 4X_1 + 6X_2 \leq 24 \\
&\quad X_2 \leq 4 \\
&\quad X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

و عند حل هذه المسألة باستخدام السمبلكس سنحصل على الجداول التالية: (٤ , ١٥ إلى ٤ , ١٨).

جدول رقم (٤ , ١٥). الجدول الأول السمبلكس للمسألة (٤ , ٤).

BC	BV	X1 (5)	X2 (5)	S1 (0)	S2 (0)	S3 (0)	RHS	Ratio
0	S_1	3	3	1	0	0	15	5
0	S_2	4	6	0	1	0	24	4
0	S_3	0	1	0	0	1	4	4
	Zj	0	0	0	0	0	0	
Cj-Zj		5	5	0	0	0		

نظراً لأن قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية X_1, X_2 متساوية فيمكن الاختيار عشوائياً للمتغير الداخل، ولنفرض أننا اخترنا المتغير X_2. نلاحظ أن أقل نسبة هي في القيد الثاني والثالث، وكلاهما يساوي ٤. فإذا اخترنا عشوائياً الصف الثالث، ويكون S_3 هو المتغير الخارج فسنحصل على الجدول التالي رقم (٤ , ١٦):

جدول رقم (٤ , ١٦). يوضح حالة التحلل وقيمة المتغير الداخل تساوي صفراً.

BC	BV	X1 (5)	X2 (5)	S1 (0)	S2 (0)	S3 (0)	RHS	Ratio
0	S_1	3	0	1	0	-3	3	1
0	S_2	4	0	0	1	-6	0	0
5	X_2	0	1	0	0	1	4	UNA
	Zj	0	5	0	0	5	20	
Cj-Zj		5	0	0	0	-5		

لاحظ أننا وقعنا هنا في حالة التحلل حيث إن المتغيرات الأساسية الموجبة هي اثنان فقط، وهما S_1, X_2، وعدد القيود ثلاثة. لاحظ أيضاً الأثر الذي ستوقعه حالة التحلل على الجدول الثالث رقم (٤ , ١٧). المتغير الداخل هو X_1 ، والمتغير الخارج هو S_2.

جدول (٤ , ١٧). يوضح بقاء قيمة دالة الهدف كما هي في الجدول رقم (٤ , ١٦).

BC	BV	X1 (5)	X2 (5)	S1 (0)	S2 (0)	S3 (0)	RHS	Ratio
0	S_1	0	0	1	-3/4	6/4	3	2
5	X_1	1	0	0	1/4	-6/4	0	UNA
5	X_2	0	1	0	0	1	4	4
	Zj	5	5	0	5/4	-2.5	20	
Cj-Zj		0	0	0	-5/4	2.5		

في الجدول السابق رقم (١٧ , ٤) بقيت قيمة دالة الهدف كما هي، وهذه إحدى مشكلات حالة التحلل حيث إن الانتقال من جدول إلى آخر لم ينتج عنه أي تحسن في قيمة دالة الهدف، وهذا ما يعرف بالدوران Cycling، [Bazaraa et al., 1990] و[Rardin, 1998]. لكن استطعنا الخروج من هذه المشكلة في الجدول التالي رقم (١٨ , ٤) ، حيث تحسنت قيمة دالة الهدف وأصبح لدينا حل أمثل. لاحظ كذلك أن قيمة Cj-Zj لأحد المتغيرات غير الأساسية S_2 تساوي الصفر، مما يعني أن لدينا حلاً بديلاً لو أدخلنا S_2 ، وعندها ستتغير قيم المتغيرات، لكن لن تتغير قيمة دالة الهدف؛ لأن الحل بديل (متعدد).

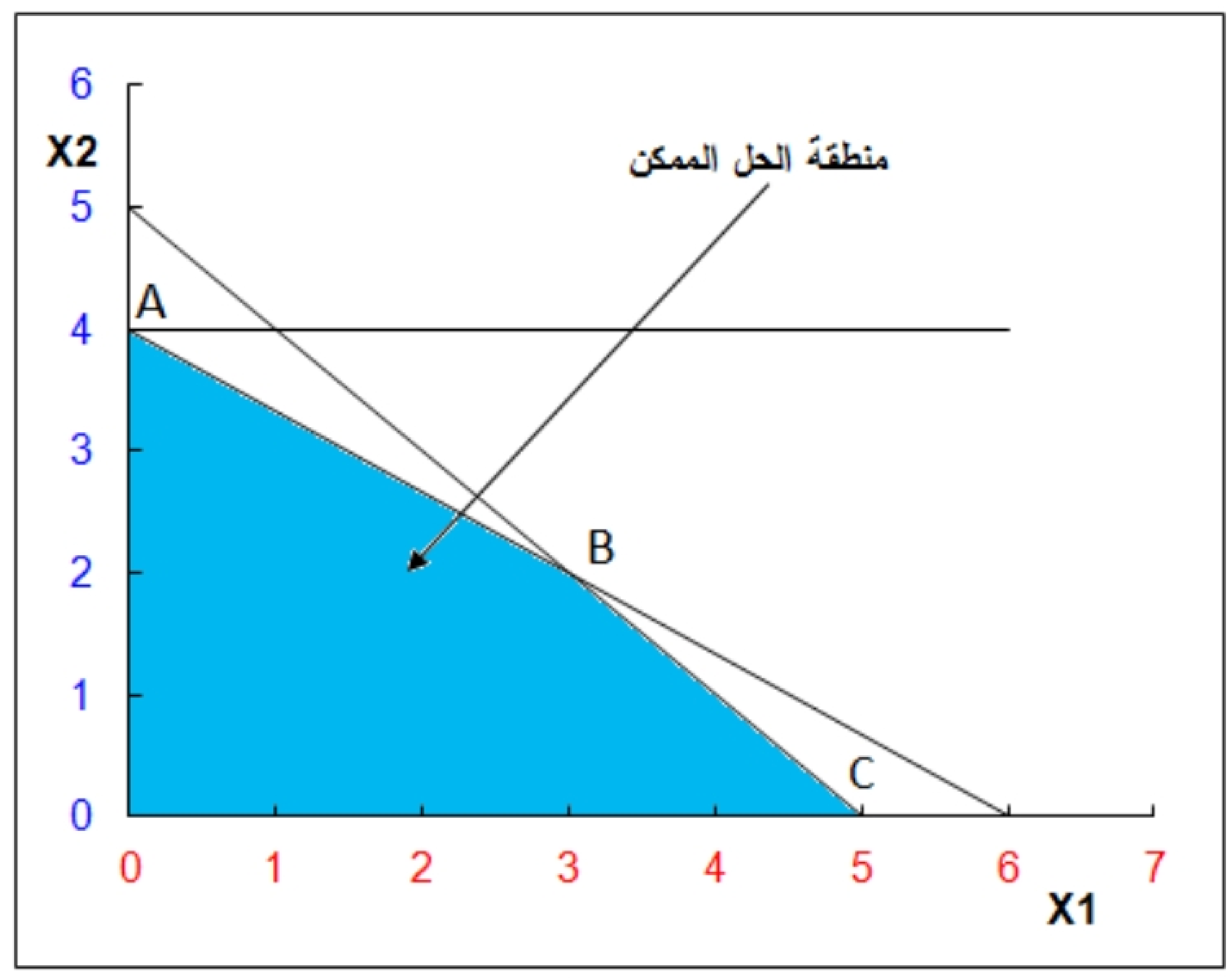
جدول رقم (١٨ , ٤). يوضح الخروج من حالة التحلل وتحسن قيمة دالة الهدف.

		5	**5**	**0**	**0**	**0**		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_3	0	0	4/6	-1/2	1	2	
5	X_1	1	0	1	-1/2	0	3	
5	X_2	0	1	-4/6	1/2	0	2	
	Zj	5	5	10/6	0	0	25	
Cj-Zj		0	0	-10/6	0	0		

و باستخدام الرسم البياني (شكل رقم ١ , ٤) نجد أن حالة التحلل وقعت عند النقطة A. عند هذه النقطة كانت قيمة $X_2=4, S_1=3$ لكن باقي المتغيرات $X_1, S_2, S_3=0$؛ وذلك لأن هذه النقطة تمثل تقاطع ثلاثة قيود: القيد الثاني، والثالث، وقيد عدم السلبية $X_1 \geq 0$. لاحظ أن الحل الأمثل يقع عند النقطة B أو C أو أي نقطة بينهما على الخط المستقيم (حل متعدد أو بديل) حيث إن ميل دالة الهدف يساوي ميل القيد الأول.

قاعدة (٩ , ٤):

في جداول السمبلكس قيمة دالة الهدف في الجدول اللاحق تكون دائماً أفضل من قيمة دالة الهدف في الجدول السابق إلا في حالة التحلل فإن قيمة دالة الهدف في الجدول اللاحق تساوي قيمة دالة الهدف في الجدول السابق ما لم نخرج من هذه الحالة. [Winston, 2004]



شكل رقم (١ , ٤). يوضح الحل الأمثل للمسألة رقم (٤ , ٤) باستخدام الرسم البياني.

ملحـــق

طريقة أخرى لعملية الصفوف:

يمكن استخدام طريقة أخرى لتنفيذ عملية الصفوف [Taylor III, 2010]، وذلك بحساب معاملات المتغيرات، وقيم الجانب الأيمن للقيود في كل جدول جديد من جداول السمبلكس كالتالي:

١-نقسم عناصر صف المتغير الخارج على قيمة عنصر الارتكاز .

٢-المتغير الأساسي في كل صف يأخذ القيمة ١ تحت العمود الخاص بالمتغير وفي نفس الصف وصفراً في باقي الصفوف.

٣-لحساب باقي القيم في الجدول نطبق القاعدة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{حاصل ضرب القيم المتقابلة}}{\text{عنصر الارتكاز}}$$

لتطبيق ذلك على المسألة (١ , ٤):

بعد عمل الجدول الأول لحل المسألة جدول رقم (١٩ , ٤) يمكن تطبيق هذه الطريقة على الجداول التالية:

جدول رقم (١٩ , ٤). يوضح المتغير الداخل والمتغير الخارج للمسألة رقم (١ , ٤).

		↑ 6	4	0	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	2	2	1	0	0	16	16/2=8
0	S_2	1	3	0	1	0	12	12/1=12
0	S_3	3	3	0	0	1	18	18/3=6 →
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj	6	4	0	0	0		

لعمل الجدول الثاني نطبق الخطوتين الأولى والثانية كما في جدول رقم (٢٠ , ٤):

جدول (٢٠ , ٤). الجدول الثاني للمسألة (١ , ٤) بعد تطبيق الخطوة ١ والخطوة ٢ أعلاه.

		6	4	0	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	0		1	0			
0	S_2	0		0	1			
6	X_1	1	1	0	0	1/3	6	
	Zj							
	Cj-Zj							

الآن يمكن تطبيق الخطوة الثالثة لإكمال الجدول الثاني وملء الفراغات فيه. مثلاً لإيجاد قيمة معامل X_2 في الصف الأول نقوم بالتالي:

- نعود إلى الجدول السابق (جدول رقم ١٩ , ٤)، ونحدد قيمة المعامل القديمة، وهي ٢، وكذلك نحدد قيمة عنصر الارتكاز وهي ٣.
- نحدد القيم المتقابلة (من جدول ١٩ , ٤)، وهي التي تمثل الركنين الآخرين للمستطيل حيث قيمة الركنين الأولين هما قيمة المعامل القديمة وعنصر الارتكاز. وهذه القيم المتقابلة هي ٣ و٢.
- نطبق القاعدة:

$$\text{القيمة الجديدة} = 2 - \frac{2 \times 3}{3} = 0$$

	X_1		X_2	
معامل X_1 في القيد الأول ←	2	╲╱	2	← معامل X_2 الحالي
عنصر الإرتكاز ←	3	╱╲	3	← معامل X_2 في القيد الثالث

و يمكن تطبيق هذه القاعدة لملء الفراغات الأخرى في الجدول للحصول على الجدول الثاني (١٢ , ٤).

جدول رقم (٢١ , ٤). الجدول الثاني بعد تطبيق الخطوة ٣.

		6	4	0	0	0		
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**RHS**	**Ratio**
0	S_1	0	0	1	0	-2/3	4	
0	S_2	0	2	0	1	-1/3	6	
6	X_1	1	1	0	0	1/3	6	
	Zj	6	6	0	0	2	36	
	Cj-Zj	0	-2	0	0	-2		

ملاحظة:

يتم تطبيق هذه الطريقة لمعاملات المتغيرات غير الأساسية لكل جدول لاحق من جداول السمبلكس باستخدام عنصر الارتكاز وبيانات الجدول السابق، وذلك بعد قسمة صف المتغير الخارج على قيمة عنصر الارتكاز وعمل مصفوفة الوحدة للمتغيرات الأساسية.

تمارين محلولة

السؤال الاول: باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية مع بيان المتغير الداخل والخارج، وهل وصلنا إلى الحل الأمثل، ولماذا؟

$$\begin{aligned}
&\text{Max } w = 2X + 3Y + 4Z \\
&\text{S.T.} \\
&\quad X + Y + Z \le 1 \\
&\quad X + Y + 2Z = 2 \\
&\quad 3X + 2Y + Z \ge 4 \\
&\quad X, Y, Z \ge 0
\end{aligned}$$

الحل:

نحول الصيغة الرياضية إلى الصيغة القياسية كالتالي:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } w = 2X + 3Y + 4Z + 0S_1 + 0S_3 - MA_2 - MA_3 \\
&\text{S.T.} \\
&\quad X + Y + Z + S_1 = 1 \\
&\quad X + Y + 2Z + A_2 = 2 \\
&\quad 3X + 2Y + Z - S_3 + A_3 = 4 \\
&\quad X \ge 0, Y \ge 0, Z \ge 0, S_1 \ge 0, S_3 \ge 0, A_2 \ge 0, A_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

		2	3	4	0	0	-M	-M		
BC	BV	X	Y	Z	S_1	S_3	A_2	A_3	RHS	Ratio
0	S_1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
-M	A_2	1	1	2	0	0	1	0	2	2
-M	A_3	3	2	1	0	-1	0	1	4	4/3
Zj		-4M	-3M	-3M	0	M	-M	-M	-6M	
Cj-Zj		2+4M	3+3M	4+3M	0	-M	0	0		

حيث إننا في حالة Max فيدخل المتغير X (أكبر قيمة موجبة في صف Cj-Zj)، ويخرج المتغير S_1 (أصغر نسبة)، ويكون عنصر الارتكاز هو معامل X في الصف الأول، وبالتالي تأخذ X معاملات المتغير الخارج S_1، ويستمر الحل بعمل جدول آخر.

		2	3	4	0	0	-M	-M		
BC	BV	X	Y	Z	S_1	S_2	A_2	A_3	RHS	Ratio
2	X	1	1	1	1	0	0	0	1	1
-M	A_2	0	0	1	-1	0	1	0	1	2
-M	A_3	0	-1	-2	-3	-1	0	1	1	4/3
Zj		2	2+M	2+M	2+4M	M	-M	-M	-2M	
Cj-Zj		0	1-M	2-M	-2-4M	-M	0	0		

حيث إن جميع قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية سالبة، ونحن في حالة Max، ولم نستطع التخلص من المتغيرات الاصطناعية، فإن المسألة غير ممكنة الحل.

السؤال الثاني: باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية مع شرح كل جدول، وبيان ما إذا كان من الممكن أن يتحسن الحل، ولماذا؟.

Min $w = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$
S.T.

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \le 12$$
$$2X_1 - 3X_2 \ge 6$$
$$X_1 \ge 0,\ X_2 \le 0,\ X_3 : urs$$

الحـــــل:

حيث إن بعض المتغيرات تخالف قيد عدم السلبية اللازم لحل مسائل البرمجة الخطية، فلابد من تحويل هذه المتغيرات إلى متغيرات عدم السلبية، وذلك بعمل الافتراضات التالية :

If $X_2 = -X_4$, and $X_4 \ge 0$, and If $X_3 = X_5 - X_6$, and $X_5 \ge 0$, $X_6 \ge 0$,

و لابد من تصحيح هذه الافتراضات بعد الانتهاء من حل المسألة بإعادتها إلى صورتها الأصلية.

$$\text{Min } w = 3X_1 - 5X_4 + 2X_5 - 2X_6 + 0S_1 + 0S_2 + MA_2$$

S.T.

$$3X_1 - 4X_4 + 2X_5 - 2X_6 + S_1 = 12$$
$$2X_1 + 3X_4 - S_2 + A_2 = 6$$
$$X_1 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, X_6 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, A_2 \geq 0.$$

		3	–5	2	–2	0	0	M		
BC	BV	X_1	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	A_2	RHS	RATIO
0	S_1	3	–4	2	–2	1	0	0	12	UNA
M	A_2	2	3	0	0	0	–1	1	6	2
	Zj	2M	3M	0	0	0	–M	M	6M	
	Cj–Zj	3-2M	-5-3M	2	-2	0	M	0		

حيث إننا في حالة Min، فيدخل المتغير X_4 (أصغر قيمة سالبة في صف Cj-Zj)، ويخرج المتغير A_2 (أصغر نسبة)، ويكون عنصر الارتكاز هو معامل X_4 في الصف الثاني، ولهذا تأخذ X_4 معاملات المتغير الخارج A_2، ويستمر الحل بعمل جدول آخر.

		3	–5	2	–2	0	0		
BC	BV	X_1	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	RHS	RATIO
0	S_1	17/3	0	2	–2	1	–4/3	20	UNA
-5	X_4	2/3	1	0	0	0	–1/3	2	UNA
	Zj	-10/3	-5	0	0	0	5/3	-10	
	Cj–Zj	19/3	0	2	-2	0	-5/3		

ما زال بالإمكان تحسين الحل بدخول X_6 (أصغر قيمة سالبة في صف Cj-Zj)، ولكن لا يمكن خروج أي متغير، حيث جميع النسب غير مقبولة (معاملات المتغير الداخل أصغر أو تساوي الصفر)، مما يعني أن الحل غير محدد Unbounded.

تمارين

السؤال الأول: باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن لصيغة البرمجة الخطية التالية مع شرح كل جدول:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 4X_1 + 5X_2\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 3X_1 + X_2 \le 27\\
&\quad 2X_1 + 2X_2 = 24\\
&\quad 6X_1 + 4X_2 \ge 26\\
&\quad X_1 \ge 0 \;\; X_2 : \text{urs}
\end{aligned}$$

السؤال الثاني: باستخدام طريقة السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن لصيغة البرنامج الخطي التالي مع شرح كل جدول، وبيان ما إذا كان من الممكن أن يتحسن الحل، ولماذا؟

$$\begin{aligned}
&\text{Min } W = 4X_1 + 4X_2 + X_3\\
&\text{S.T.}\\
&\quad X_1 + X_2 + X_3 \le 2\\
&\quad 2X_1 + X_2 \le 3\\
&\quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 \ge 3\\
&\quad X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الثالث: باستخدام الرسم البياني مرة والسمبلكس مرة أخرى، أوجد الحل الأمثل إن أمكن لصيغة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 4X_1 + 5X_2\\
&\text{S.T.}\\
&\quad 3X_1 + X_2 \le 27\\
&\quad 2X_1 + 2X_2 = 24\\
&\quad 6X_1 + 4X_2 \ge 26\\
&\quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الرابع: باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية مع بيان المتغير الداخل والخارج وهل وصلنا إلى الحل الأمثل، ولماذا؟

$$\begin{aligned}
&\text{Max } w = 2X + 3Y + 4Z\\
&\text{S.T.}\\
&\quad X + Y + Z \le 1\\
&\quad X + Y + 2Z = 2\\
&\quad 3X + 2Y + Z \ge 4\\
&\quad X, Y, Z \ge 0
\end{aligned}$$

السؤال الخامس: باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية مع شرح كل جدول، وبيان ما إذا كان من الممكن أن يتحسن الحل، ولماذا؟

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$
S.T.
$$3X_1 + X_2 + 4X_3 \geq 60$$
$$2X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 48$$
$$2X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 54$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

السؤال السادس: باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن للصيغة الرياضية التالية مع شرح كل جدول، وبيان ما إذا كان من الممكن أن يتحسن الحل، ولماذا؟

$$\text{Min } w = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$$
S.T.
$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 12$$
$$2X_1 - 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 \text{ :unr}$$

السؤال السابع: للصيغة التالية:

$$\text{Min } w = 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3$$
S.T.
$$Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 2$$
$$Y_1 - Y_2 - Y_3 = 1$$
$$Y_1\text{:urs},\ Y_2 \leq 0,\ Y_3 \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل إن أمكن لهذه المسألة باستخدام السمبلكس.

السؤال الثامن: تنوي إحدى المؤسسات الغذائية إنتاج طعام يصلح لاستخدام المسافرين في أطباق تزن ٢٥٠ جراماً، فإذا علمت أن الطبق الواحد يجب أن يحتوي على ثلاثة عناصر غذائية والموجودة في أربعة أنواع من الأطعمة يمكن أن تستخدم لتكوين طبق واحد. الجدول التالي يمثل عدد الجرامات لكل عنصر غذائي في كل نوع من الأطعمة، والحدود الدنيا لكل عنصر غذائي، والتي يلزم توفرها في كل طبق، وتكلفة كل نوع من الأطعمة. (ملاحظة: الوحدة الواحدة من أي طعام تحتوي على عناصر أخرى، ولذلك يكون وزن الوحدة الواحدة من الطعام أكبر من مجموع أوزان العناصر الثلاثة).

	محتويات وتكاليف كل نوع من الأطعمة في الطبق الواحد				
نوع الطعام للوحدة	العنصر ١	العنصر ٢	العنصر ٣	وزن الوحدة من الطعام	التكلفة بالريال للوحدة
الطعام أ	3	7	5	20	0.4
الطعام ب	5	4	6	22	0.6
الطعام ج	2	2	6	15	0.3
الطعام د	3	8	2	18	0.2
الحدود الدنيا بالجرام	50	85	70		

و المطلوب:

١.كتابة الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برمجة الخطية (LP) لتصغير تكلفة إنتاج الطبق الواحد.

٢.حل المسألة باستخدام السمبلكس إن أمكن.

السؤال التاسع: أحمد لديه ٦٠٠٠ ريال في بداية الصيف، وقرَّر أن يستثمر هذا المبلغ في أحد المشروعين الأول، أو الثاني، أو كليهما، أو أجزاء منهما. فإذا علمت أن أحمد يستطيع أن يعمل ٦٠٠ ساعة كحد أقصى في هذا الصيف، وأن المشروع الأول يحتاج إلى ٥٠٠٠ ريال كتكلفة و٤٠٠ ساعة عمل، والمشروع الثاني يحتاج إلى ٤٠٠٠ ريال كتكلفة، و٣٥٠ ساعة عمل (هذا إذا استثمر في أيٍ من المشروعين بنسبة ١٠٠٪). فإذا علمت أن المشروع الأول يعطي ربحاً قدره ٦٥٠٠ ريال، والمشروع الثاني يعطي ربحاً قدره ٥٠٠٠ ريال، فإن المطلوب:

١- اكتب الصياغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي لتعظيم أرباح أحمد من المشروعين.

٢-باستخدام الرسم البياني، أوجد الحل الأمثل إن أمكن.

٣-باستخدام السمبلكس، أوجد الحل الأمثل إن أمكن.

السؤال العاشر: أحد مصانع الألعاب يقوم بتصنيع ثلاثة أنواع من الألعاب الكهربائية، وكل نوع يحتاج إلى طريقة مختلفة في التصنيع. الوحدة الواحدة من النوع الأول تحتاج إلى ١٧ ساعة عمل و٨ ساعات اختبار، وتحقق صافي ربح بقيمة ٣٠٠ ريال. الوحدة الواحدة من النوع الثاني تحتاج إلى ١٠ ساعات عمل و٤ ساعات اختبار، وتحقق صافي ربح بقيمة ٢٠٠ ريال. الوحدة الواحدة من النوع الثالث تحتاج إلى ساعتين عمل وساعتين اختبار وتحقق صافي ربح بقيمة ١٠٠ ريال. فإذا علمت أن المتاح لدى المصنع ١٠٠٠ ساعة عمل و٥٠٠ ساعة اختبار، وأن قسم التسويق قد أكد أن الطلب على الأنواع الثلاثة لن يزيد عن ٥٠ و٨٠ و١٥٠ وحدة لكل نوع على التوالي، ولهذا عدم تجاوز هذه الكميات عند الإنتاج. فإن المطلوب:

١- اكتب الصيغة الرياضية المناسبة على شكل LP لتعظيم الأرباح الكلية من إنتاج هذه الألعاب.

٢-أوجد الحل الأمثل إن أمكن.

المراجـــــع
References

Bazaraa M.S., Jarvis J.J., and Sherali H.D.: Linear Programming And Network Flows, 2nd ed., John Wiley & Sons, USA, 1990.

Gould F.J., Eppen G.D., and Schmidt C.P.: Introductory Management Science, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991 .

Render B., Stair R.M. Jr, and Hanna M.E.: Quantitative Analysis For Management, 8th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.

Taylor III, Bernard: Introduction to Management Science, 10/E ,Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2010.

Walker, Russell C.: Introduction To Mathematical Programming, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

الفصل الخامس

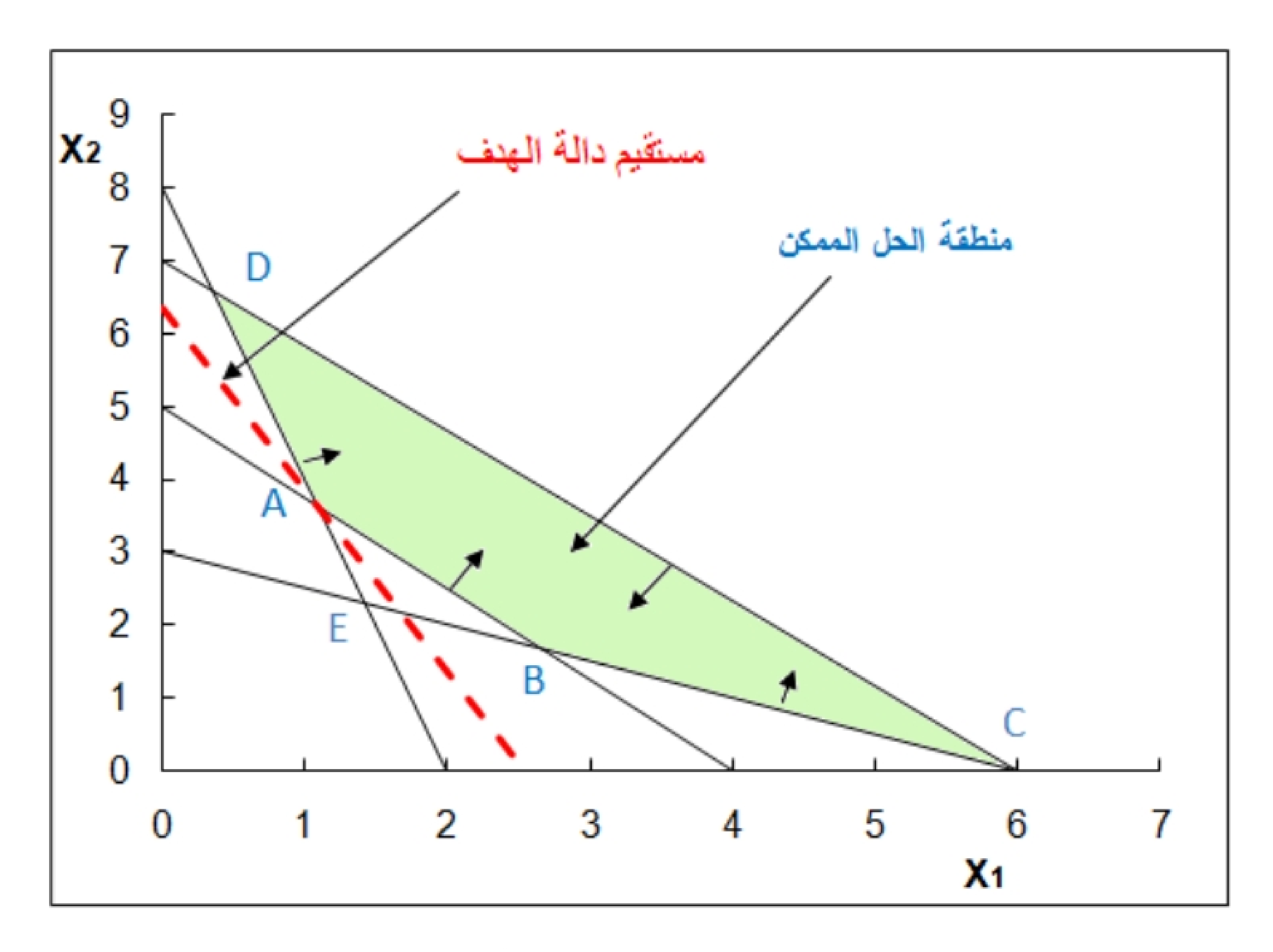
تحليل الحساسية
Sensitivity Analysis

يدرس تحليل الحساسية أثر التغيرات في بعض عناصر البرنامج الخطي على الحل الأمثل الحالي. من ذلك مثلاً [Gould et al., 1991] معرفة أثر التغير في معاملات دالة الهدف، أو معاملات المتغيرات في القيود، أو أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيود، أو أثر إضافة متغير جديد، أو حذف متغير قديم على الحل الأمثل الحالي. ويمكن للدارس معرفة أثر هذه التغيرات باستخدام الرسم، أو باستخدام السمبلكس، أو باستخدام مخرجات بعض البرامج الحاسبية مثل LINDO, Win QSB, QM for Windows, Solver by Excel. ويعتبر تحليل الحساسية مهماً جداً لمتخذ القرار؛ وذلك لأنه يساعد على سرعة اتخاذ القرارات الإدارية. لنأخذ المسألة التالية (١ , ٥) لتوضيح ذلك:

Min $z = 5X_1 + 2X_2$
Subject to:

$$3X_1 + 6X_2 \geq 18$$
$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$
$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$
$$7X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

نلاحظ أن قيم الحل الأمثل لهذه المسألة هي ($Z=12.7272, X_1=1.0909, X_2=3.6363$)، وذلك عند النقطة A التي تمثل تقاطع القيدين الثاني والثالث (القيود النشطة). ولكن ماذا يحدث للحل الأمثل الحالي لو تغيرت بعض العناصر في البرنامج الخطي؟ تحليل الحساسية يساعد في الإجابة عن مثل هذه الأسئلة. والمقصود بما يحدث للحل الأمثل الحالي، أي ماذا يحدث للتالي؟



الشكل رقم (١ ,٥ -أ). يوضح منطقة الحل الممكن للمسألة (١ ,٥) ومستقيم دالة الهدف.

- القيود النشطة: هل ستظل نشطة أم سيتغير واحد منها على الأقل ويصبح قيداً غير نشط؟
- قيم المتغيرات: هل ستظل قيمها كما هي أم ستتغير (هل تتغير نقطة الحل الأمثل الحالي)؟
- قيمة دالة الهدف: هل ستظل كما هي أم ستتغير (إلى الأفضل أو إلى الأسوأ)؟

فإذا لم يتغير الحل الأمثل فإن هذا يعني:

- من المؤكد أن مجموعة القيود النشطة لم تتغير، وبقيت نشطة مع إمكانية تحول أي قيد غير نشط إلى قيد نشط.
- من الممكن أن تتغير قيم المتغيرات، ولكن المتغيرات الأساسية ستبقى أساسية وغير الأساسية ستبقى غير أساسية.
- من الممكن أن تتغير قيمة دالة الهدف أو تظل كما هي.

وإذا تغير الحل الأمثل، فإن هذا يعني:

- من المؤكد أن مجموعة القيود النشطة قد تغيرت بمعنى أن واحداً أو أكثر من القيود النشطة قد تحول إلى قيدٍ غير نشط.
- من المؤكد أن تتغير قيم المتغيرات.
- غالباً ستتغير قيمة دالة الهدف وفي حالات قليلة جداً لن تتغير. سنذكر مثالاً لهذه الحالات القليلة في نهاية هذا الباب.

وهذا التغير في الحل الأمثل يحدث إذا تغير عنصرٌ واحدٌ من عناصر البرنامج الخطي مع بقاء باقي العناصر الأخرى ثابتة، وكذلك إذا تغير أكثر من عنصر في وقتٍ واحد [Winston, 2004]. ولجعل الأمر أكثر سهولة فنبدأ بدراسة أثر التغير لعنصرٍ واحدٍ فقط من عناصر البرنامج الخطي مع بقاء جميع العناصر الأخرى ثابتة.

تذكر دائماً أن عبارة الحل الأمثل Optimal Soloution الحالي يتغير أو لا يتغير مرتبطة بالقيود النشطة، فإذا تغير الحل الأمثل الحالي، فإن هذا يعني أن القيود النشطة تغيرت، وإذا لم يتغير الحل الأمثل الحالي، فإن القيود النشطة لم تتغير، وهذا يختلف عن نقطة الحل الأمثل Optimal Soloution Point.

الحالة الأولى: تحليل الحساسية عند تغير عنصرٍ واحدٍ من عناصر البرنامج الخطي مع بقاء باقي العناصر الأخرى ثابتة:

سنتحدث في هذا القسم عن ١) تحليل الحساسية باستخدام الرسم البياني ليتمكن القارئ من تصور ما يحدث، ثم سننتقل إلى الحديث عن ٢) تحليل الحساسية باستخدام مخرجات البرامج الحاسوبية للبرمجة الخطية، وأخيراً عن ٣). تحليل الحساسية باستخدام طريقة السمبلكس. يلاحظ تأخيرنا لموضوع تحليل الحساسية باستخدام طريقة السمبلكس، وذلك حتى يتسنى للقارئ معرفة بعض المصطلحات العلمية والموجودة في مخرجات البرامج الحاسوبية قبل معرفة كيفية إيجادها باستخدام السمبلكس.

أولاً: تحليل الحساسية بيانياً:

أثر التغير في معامل أحد المتغيرات في دالة الهدف على الحل الأمثل:

أ. إذا كان التغير في معامل متغير أساسي ذا قيمة موجبة:

لو تغير معامل X_1 في دالة الهدف فإن هذا التغير قد يؤثر، وقد لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي، والمعيار هنا هو معرفة المدى المسموح به لهذا المعامل بالتغير. فإذا تغير هذا المعامل بقيمة ضمن المدى المسموح به فإن الحل الأمثل الحالي سيبقى كما هو ولكن لو كان هذا التغير خارج المدى المسموح به فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير. ولتحديد هذا المدى فلابد أن نستخدم العلاقة بين معاملات المتغيرات في دالة الهدف ومعاملات المتغيرات في القيود النشطة (القيد الثاني والقيد الثالث في المسألة رقم ١ , ٥)، والموضحة في العلاقة التالية [Gould et al., 1991] و[Winston, 2004]:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط i}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط i}}$$

فلو أردنا معرفة الحد الأدنى لمعامل X_1 الذي يُبقي الحل الأمثل الحالي كما هو أي تبقى القيود النشطة كما هي، وقيم المتغيرات كما هي مع تغير قيمة دالة الهدف (Objective Value) فيجب أن نتعامل مع القيد الثاني؛ لأنه كلما انخفض معامل X_1 في دالة الهدف فإن ميل دالة الهدف يكون أقرب إلى مساواة ميل القيد الثاني، ولذلك فإن:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الثاني}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الثاني}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{2} = \frac{5}{4}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_1 في دالة الهدف = $\frac{5 \times 2}{4}$ = **2,5**

و العكس بالنسبة لمعامل X_2 في دالة الهدف فكلما زاد كان ميل دالة الهدف أقرب إلى مساواة ميل القيد الثاني، ولهذا فإن الحد الأعلى لمعامل X_2 في دالة الهدف:

$$\frac{5}{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{5}{4}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_2 في دالة الهدف = $\frac{5 \times 4}{5} = \mathbf{4}$

و بنفس الطريقة يمكن أن تكون العلاقة بين معاملات دالة الهدف، ومعاملات القيد النشط الثالث، فلو أردنا معرفة الحد الأعلى لمعامل X_1 الذي يبقي الحل الأمثل كما هو أي تبقى القيود النشطة كما هي، وقيم المتغيرات كما هي مع تغير قيمة دالة الهدف فيجب أن نتعامل مع القيد الثالث؛ لأنه كلما زاد معامل X_1 في دالة الهدف فإن ميل دالة الهدف يكون أقرب إلى مساواة ميل القيد الثالث، ولهذا فإن:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الثالث}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الثالث}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{2} = \frac{8}{2}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_1 في دالة الهدف = $\frac{8 \times 2}{2} = \mathbf{8}$

و العكس بالنسبة لمعامل X_2 في دالة الهدف، فكلما انخفض كان ميل دالة الهدف أقرب إلى مساواة ميل القيد الثالث، ولهذا فإن:

$$\frac{5}{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{8}{2}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف = $\frac{2 \times 5}{8} = \mathbf{1.25}$

والخلاصة، أن الزيادة المسموح بها والنقصان المسموح به لمعامل المتغير في دالة الهدف هي القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحالية لمعامل المتغير في دالة الهدف والحد الأعلى أو الحد الأدنى لهذا المعامل كما يلي:

المتغير Variable	المعامل الحالي Current Coefficient	الزيادة المسموح بها Allowable Increase	النقصان المسموح به Allowable Decrease
X_1	5	3	2,5
X_2	2	2	0,75

هذا يعني إذا زاد معامل X_1 مثلاً بقيمة ٢ (وهي زيادة ضمن الزيادة المسموح بها) وأصبح ٧ فإن:

١-الحل الأمثل لن يتغير، وذلك يعني أن القيد الثاني والقيد الثالث سيبقيان نشطين،

٢-قيم المتغيرات لن تتغير أي أن $X_1=1.0909, X_2=3.6363$ ،

٣-أما قيمة دالة الهدف Z فإنها ستتغير وتصبح كالتالي:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (\Delta c_1 \times X_1)$$

قاعدة رقم (١ , ٥) [Winston, 2004]:

$$\text{New Z-value} = \text{Old z–value} + (\Delta C_i \times X_i)$$

حيث،

New Z-value : قيمة دالة الهدف الجديدة

Old Z-value : قيمة دالة الهدف القديمة

Δc_j : مقدار التغير في معامل X_j في دالة الهدف وتكون قيمته موجبة في حالة الزيادة وسالبة في حالة النقصان

إذاً: $\text{New Z-value} = 12.7272 + (2 \times 1.0909) = 14.909$

أو يمكن حسابها كالتالي :

قاعدة رقم (٢ , ٥) [Winston, 2004]:

$$\text{New z-value} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n$$

حيث، c_j: معامل المتغير X_j في دالة الهدف

إذاً: New Z-value = (7) (1.0909) + (2) (3.6363) = 14.909

أما لو كان التغير في معامل دالة الهدف خارج نطاق المدى المسموح به، فإن ذلك يعني أن أحد القيدين النشطين على الأقل سيتحول إلى قيد غير نشط، وعليه فإن الحل الأمثل سيتغير أي أن مجموعة أو تشكيلة القيود النشطة ستتغير ومن ثم تتغير قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف. وكمثال على ذلك لنفرض أن معامل X_1 في دالة الهدف نقص بمقدار ٣ وحدات، وأصبح ٢ بدلاً من ٥. حيث إن هذا النقصان خارج نطاق مدى النقصان المسموح به وبالعودة إلى الحل البياني نجد أن نقطة الحل الجديدة هي B ، وفيها يكون القيد الأول والقيد الثاني نشطين، أما القيد الثالث فأصبح قيداً غير نشط. وعند هذه النقطة فإن قيمة المتغيرات وقيمة دالة الهدف متساويان:

$$(Z=8.67, X_1=2.67, X_2=1.67)$$

و هنا يُلاحظ الانخفاض في قيمة دالة الهدف عن السابق والناتج من انخفاض معامل X_1 في دالة الهدف.

قاعدة رقم (٣ ,٥) [Gould et al, 1991] و[Winston, 2004]:

إذا تغير معامل أحد المتغيرات الأساسية (و الذي قيمته موجبة عند الحل الأمثل) في دالة الهدف ضمن المدى المسموح به مع بقاء جميع العناصر الأخرى ثابتة فإن:

١. الحل الأمثل الحالي لن يتغير أي أن القيود النشطة ستظل نشطة.
٢. لن تتغير قيم المتغيرات (نقطة الحل الأمثل).
٣. ستتغير قيمة دالة الهدف.

أما إذا كان التغير في معاملات دالة الهدف خارج نطاق المدى المسموح به، فإن الحل الأمثل سيتغير وعليه ستتغير قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف، ولن يكون من السهل معرفة هذا التغير إلا بإعادة حل المسألة من جديد باستثناء إذا كان عدد المتغيرات اثنين.

كما يمكن اختصار الطريقة السابقة بالتالي:

معادلة دالة الهدف تساوي:

$$X_2 = \frac{Z}{2} - \frac{5X_1}{2}$$

ولهذا فإن ميل مستقيم دالة الهدف = $-\frac{5}{2}$

والذي يعني أنه كلما زادت قيمة X_1 بوحدة واحدة تنخفض قيمة X_2 بمقدار ٥ , ٢ وحدة.

فإذا تغير معامل X_1 بالنقصان، فإن مستقيم دالة الهدف سيصبح أكثر أفقية وسيميل إلى موازاة القيد الثاني فإذا نقص عن ذلك فسيتغير الحل الأمثل، ويمكن معرفة ذلك بمقارنة ميل دالة الهدف بمجهولية معامل X_1، وميل القيد الثاني كالتالي:

$$-\frac{C_1}{2} \le -\frac{5}{4} \Rightarrow C_1 \ge 2.5$$

أما إذا تغير معامل X_1 بالزيادة، فإن مستقيم دالة الهدف سيصبح أكثر عمودية وسيميل إلى موازاة القيد الثالث، فإذا زاد عن ذلك فسيتغير الحل الأمثل، ويمكن معرفة ذلك بمقارنة ميل دالة الهدف بمجهولية معامل X_1 ، وميل القيد الثالث كالتالي:

$$-\frac{C_1}{2} \ge -\frac{8}{2} \Rightarrow C_1 \le 8$$

ويمكن استخدام نفس الطريقة بالنسبة لمعامل X_2.

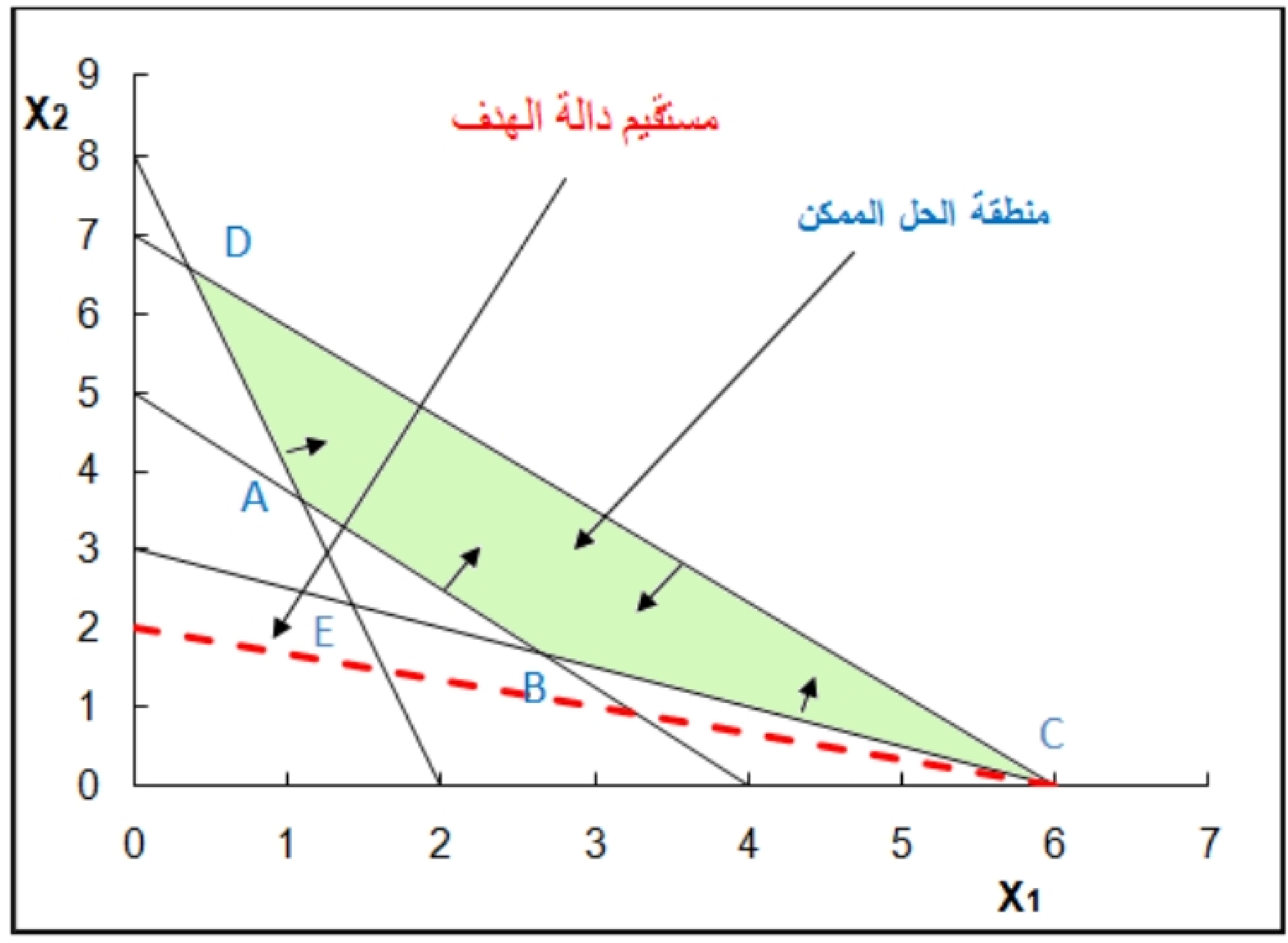
ملاحظة: انظر الملحق في نهاية الباب لإيجاد المدى المسموح به لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف عند اختلاف إشارة المعاملات.

ب. إذا كان التغير في معامل متغير أساسي قيمته تساوي الصفر أو متغير غير أساسي:

تحدثنا عن التغير في أحد المتغيرات في دالة الهدف بمعلومية أن هذا المتغير ذو قيمة موجبة. لكن ماذا لو كان هذا المتغير غير أساسي أو أساسياً قيمته تساوي صفراً عند نقطة الحل الأمثل. ما هو مدى التغير في معامل هذا المتغير في دالة الهدف بحيث لا يتغير الحل الأمثل الحالي؟ للإجابة عن هذا السؤال سنأخذ المسألة التالية (٢ , ٥)، وهي نفس مسألة (١ , ٥) مع إحداث تغيير واحد فقط في دالة الهدف:

Min $z = 2X_1 + 6X_2$
Subject to

$$3X_1 + 6X_2 \ge 18$$
$$5X_1 + 4X_2 \ge 20$$
$$8X_1 + 2X_2 \ge 16$$
$$7X_1 + 6X_2 \le 42$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$



الشكل رقم (١ , ٥ - ب). المعدل: يوضح منطقة الحل الممكن ومستقيم دالة الهدف للمسألة (٢ , ٥).

من الشكل (١ , ٥ -ب) المعدل، نلاحظ أن نقطة الحل الأمثل تقع عند النقطة C، وعندها قيمة ($X_1=6, X_2=0, Z=12$). وحيث إن قيمة المتغير $X_2=0$ (متغير غير أساسي قيمته تساوي الصفر)، فإن المدى المسموح به لمعامل هذا المتغير سيكون كالتالي:

المدى المسموح به لمعامل المتغير X_2 في دالة الهدف (قيمته تساوي الصفر عند الحل الأمثل):

[Winston, 2004] و [Taylor III, 2010]

الزيادة المسموح بها: إذا زاد معامل X_2 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك بعكس اتجاه عقارب الساعة متجهاً إلى أن يكون أفقياً. وعليه فإن هذه الزيادة لن تغير الحل الأمثل مهما كانت قيمتها، وهنا نستطيع أن نقرر أن الزيادة المسموح بها لمعامل X_2 في دالة الهدف تساوي مالا نهاية. لاحظ أن هذه الزيادة تتوافق مع المنطق حيث إننا حالياً وجدنا، بناءً على الحل الأمثل الحالي، عدم الإنتاج من X_2؛ لأن قيمة معاملها (التكلفة) كبيرة، ونحن في حالة Min فهل من المنطق أن ننتج

منها إذا زادت هذه التكلفة؟ الجواب (لا)، ولذلك فمهما زادت هذه التكلفة فسنبقى على وضعنا الحالي بعدم الإنتاج من X_2 ، والإنتاج فقط من X_1.

النقصان المسموح به: إذا نقص معامل X_2 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك باتجاه عقارب الساعة حتى يوازي مستقيم القيد الأول (ميل دالة الهدف يساوي ميل القيد الأول)، وعند موازاته للقيد الأول سيظهر لنا حل بديل وهو عند النقطة B. فإذا نقص أكثر فإن الحل الأمثل سيتحول إلى النقطة B، وعندها سيتغير الحل الأمثل. إذاً النقصان المسموح به لمعامل X_2 في دالة الهدف هو النقصان الذي يجعل مستقيم دالة الهدف يوازي مستقيم القيد الأول أي أن ميل مستقيم دالة الهدف يساوي ميل مستقيم القيد الأول. لإيجاد قيمة هذا النقصان المسموح به:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الأول}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الأول}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{٢}{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{٣}{٦}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف = $\frac{6 \times 2}{3} = 4$

بالنسبة لمعامل X_1 في دالة الهدف(قيمته موجبة عند الحل الأمثل):

الزيادة المسموح بها: إذا زاد معامل X_1 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك باتجاه عقارب الساعة حتى يوازي القيد الأول وعند موازاته للقيد الأول سيظهر لنا حل بديل وهو عند النقطة B. فإذا زاد أكثر فإن الحل الأمثل سيتحول إلى النقطة B وعندها سيتغير الحل الأمثل. إذاً الزيادة المسموح بها لمعامل X_1 في دالة الهدف هو الزيادة التي تجعل مستقيم دالة الهدف يوازي مستقيم القيد الأول أي أن ميل مستقيم دالة الهدف يساوي ميل مستقيم القيد الأول. لإيجاد قيمة هذه الزيادة المسموح بها:

$$\frac{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{٦} = \frac{٣}{٦}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_1 في دالة الهدف = $\frac{6 \times 3}{6} = 3$

النقصان المسموح به: إذا نقص معامل X_1 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك بعكس اتجاه عقارب الساعة متجهاً إلى أن يكون أفقياً. وعليه فإن هذه النقصان لن يغير الحل الأمثل مهما كانت قيمته، وهنا نستطيع أن نقرر أن النقصان المسموح به لمعامل X_1 في دالة الهدف تساوي مالا نهاية. لاحظ أن هذا النقصان يتوافق مع المنطق حيث إننا حالياً وجدنا بناءً على الحل الأمثل الحالي الإنتاج من X_1؛ لأن قيمة معاملها (التكلفة) صغيرة، ونحن في حالة Min ، فهل من المنطق أن لا نتتج منها إذا نقصت هذه التكلفة؟ الجواب (لا)، وبالتالي فكلما نقصت هذه التكلفة فسنبقى على وضعنا الحالي بعدم الإنتاج من X_2 والإنتاج فقط من X_1.

لاحظ حالة التحلل عند النقطة C، حيث تتقاطع ثلاثة قيود أحدها قيد عدم السلبية ولدينا متغيران للقرار فقط. هنا S_1, S_4, X_2 كلها تساوي الصفر والمتغيرات الأساسية الموجبة هي S_2, S_3, X_1 وعددها أقل من عدد القيود (عدد القيود أربعة). المتغير S_4 متغير أساسي لكن قيمته تساوي صفراً (انظر مشكلة حالة التحلل في تحليل الحساسية في الملحق لهذا الباب).

أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود على الحل الأمثل:

[Winston, 2004] و [Taylor III, 2010]

أولاً: أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود النشطة على الحل الأمثل:

إذا تغير الجانب الأيمن لأي قيد سواء كان نشطاً أو غير نشطٍ، فإنه سيُحدث تحركاً في القيد بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير. هذا يعني أنه في حالة القيد النشط، فإن هذا التحرك سيغير من قيم المتغيرات، ومن ثم التغير في قيمة دالة الهدف، ولكن هل يعني هذا التغير التغير في الحل الأمثل الحالي؟ بمعنى هل يعني هذا أن القيود النشطة (و هي القيود التي يُكوّن تقاطعها نقطة الحل الأمثل) سوف تتغير؟ للإجابة عن هذا السؤال يجب معرفة ما إذا كان التغير في الجانب الأيمن للقيد النشط ضمن المدى المسموح به.

لنأخذ المسألة (١ , ٥) والشكل (١ , ٥) كتطبيق للتأثير الناتج من التغير في الجانب الأيمن. حيث إن القيد الثاني قيد نشط فما هو مقدار الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني والتي تُبقي القيدين الثاني والثالث نشطين؟

إن الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني سوف تُحرك الخط المستقيم والذي يمثل القيد الثاني إلى الأعلى (اليمين) بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير وذلك لأن الزيادة حدثت في الجزء الثابت من القيد وهو الجانب الأيمن (لاحظ أن التحرك إلى الأعلى ناتج من كون معاملات المتغيرات في القيد الثاني جميعها موجبة والجانب الأيمن موجب. تحقق من ذلك). فإذا تحرك هذا القيد إلى الأعلى فإن منطقة الحلول الممكنة سوف تصغر في مثالنا هذا وذلك لأن اتجاه القيد أكبر من أو يساوي. هذه الحركة سوف تُغير نقطة الحل الأمثل تدريجياً حسب قيمة الزيادة إلى أن تتحول نقطة الحل الأمثل إلى النقطة D وهي آخر نقطة في منطقة الحلول الممكنة يلتقي فيها القيدان الثاني والثالث. أما اذا كان الأثر الناتج من الزيادة في الجانب الأيمن سيؤدي إلى تجاوز النقطة D فإن القيد الثالث سيتحول إلى قيدٍ غير نشط. (ملاحظة: إذا تجاوز أثر الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني النقطة C فإن المسألة في هذه الحالة تصبح غير ممكنة الحل Infeasible). إذاً الزيادة المسموح بها للجانب الأيمن في القيد الثاني هي الزيادة التي تجعل نقطة الحل الأمثل تتحول إلى النقطة D كما في الشكل (٥ , ٥) والشكل (٥ , ٥). ولحساب هذه الزيادة نقوم بالتالي:

عند النقطة D: $X_1 = 0.3529, X2 = 6.5882$

و بالتعويض في القيد الثاني:

$$5\ (0.3529) + 4\ (6.5882) = 28.1176$$

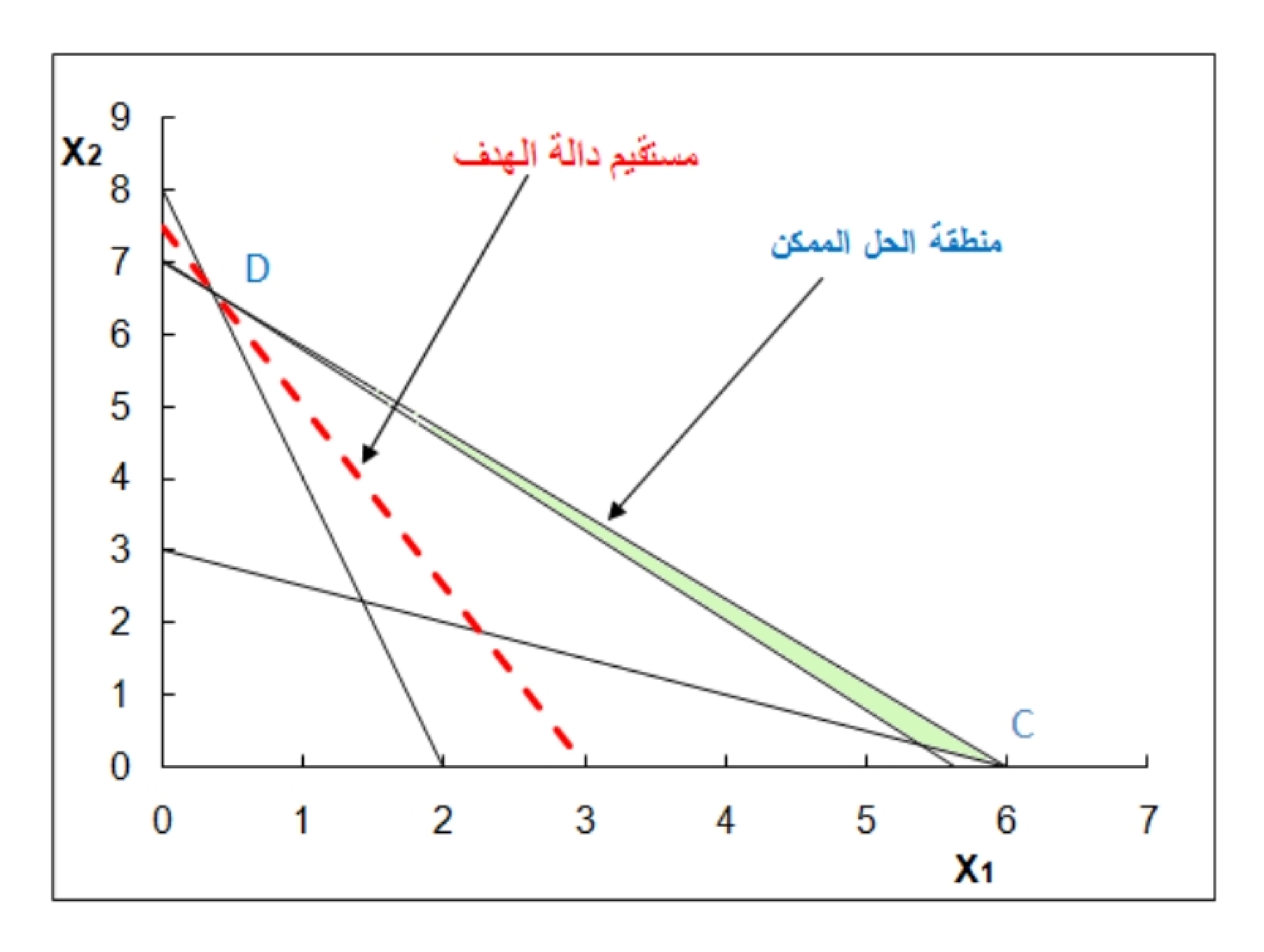
إذاً الزيادة المسموح بها للجانب الأيمن في القيد الثاني هي:

$$28.1176 - 20 = 8.1176$$

فإذا زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني زيادة أقل من أو تساوي 8.1176 (الزيادة المسموح فيها) فإن القيد الثاني والثالث سيبقيان نشطين. (لاحظ أنه عندما تكون الزيادة تساوي 8.1176 فإن هناك قيداً أخر يصبح نشطاً وهو القيد الرابع وبالتالي يكون لدينا حالة تحلل. لماذا؟) هنا يمكن لنا أن نتصور لماذا إذا زاد الجانب الأيمن في القيد الثاني تتغير قيم المتغيرات. أما دالة الهدف فتتغير قيمتها وتصبح:

$$\text{New Z-value} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = 5\ (0.3529) + 2\ (6.5882) = 14.9411$$

أي أن الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني جعلت قيمة دالة الهدف أسوأ من السابق وذلك لأن هذه الزيادة أدت إلى تصغير منطقة الحلول الممكنة بسبب أن اتجاه القيد الثاني أكبر من أو يساوي كما أوضحنا سابقاً وهذا خاصٌ بمثالنا هذا.



الشكل رقم (٢ , ٥). يوضح الزيادة المسموح بها في قيمة الجانب الأيمن للقيد النشط (الثاني) للمسألة (١ , ٥).

و الآن لننظر إلى الأثر الآخر للتغير وهو النقصان في قيمة الجانب الأيمن لهذا القيد النشط (الثاني). ما هو مقدار النقصان في الجانب الأيمن للقيد الثاني والذي يُبقيه نشطاً مع القيد الثالث؟ إذا نقصت قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني فإن الخط المستقيم والذي يمثل هذا القيد سوف يتحرك إلى الأسفل (اليسار) بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير في قيمة الجانب الأيمن. هذا التحرك إلى الأسفل سيُبقي القيدين الثاني والثالث نشطين حتى النقطة E كما في الشكل رقم (٣ , ٥) وبعدها سيتحول القيد الثاني إلى قيد غير نشط ويصبح القيدُ الأولُ نشطاً بدلاً عنه وذلك لأن القيد الثاني سيكون خارج منطقة الحلول الممكنة ويتحول إلى قيد مكرر. (تحقق من ذلك.)

عند النقطة E: $X_1 = 1.4285, X2 = 2.2857$

و بالتعويض في القيد الثاني:

$$5\ (1.4285) + 4\ (2.2857) = 16.285714$$

إذاً النُقصان المسموح به للجانب الأيمن في القيد الثاني هو:

$$20 - 16.285714 = 3.714286$$

(لاحظ عند النقطة E يكون لدينا حالة تحلل، لماذا؟)

أما قيمة دالة الهدف فتصبح:

$$\text{New Z-value} = c_1\ X_1 + c_2\ X_2 = 5\ (\ 1.4285) + 2\ (\ 2.2857) = 11.7142$$

نلاحظ هنا انخفاض في قيمة دالة الهدف (تحسن) وذلك لأن منطقة الحلول الممكنة أصبحت أكبر ولكن باتجاه اليسار. لماذا؟ انظر الاختلاف بين الشكل رقم (١ , ٥) والشكل رقم (٣ , ٥).

قاعدة (٤ , ٥):

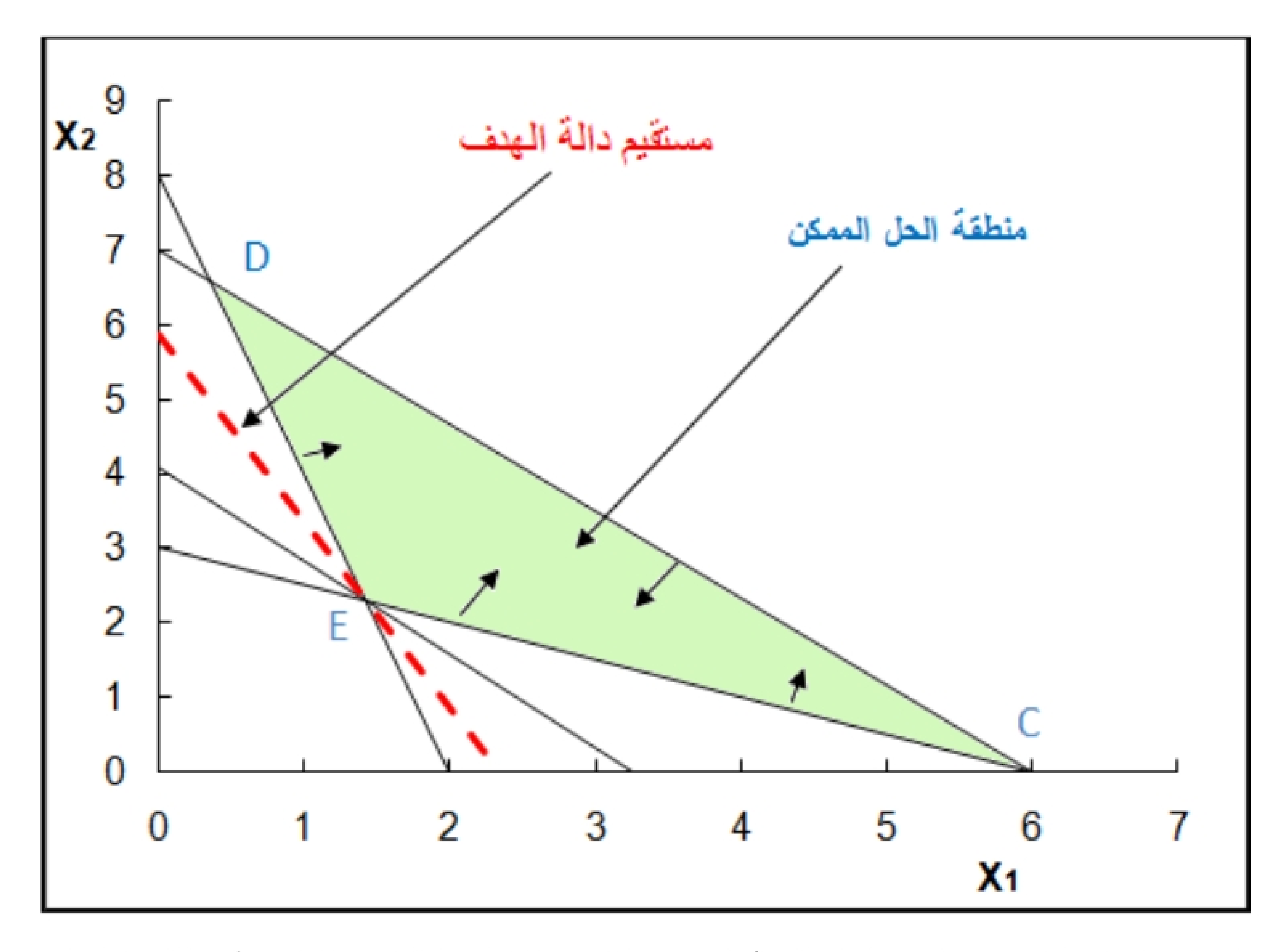
إذا كان التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيد النشط ضمن نطاق المدى المسموح به فإن:

١ - الحل الأمثل الحالي يبقى كما هو أي أن القيود النشطة لن تتغير.

٢ - قيم المتغيرات (نقطة الحل الأمثل) ستتغير.

٣- قيمة دالة الهدف ستتغير.

أما إذا كانت الزيادة خارج نطاق المدى المسموح به فإنه من الممكن معرفة الأثر الناتج إذا كانت المسألة تحتوي على متغيرين فقط وذلك باستخدام الحل البياني ولكنها تصبح غير ممكنة إذا كان عدد المتغيرات أكثر من اثنين إلا بإعادة حل المسألة من جديد.



الشكل رقم (٣، ٥). يوضح الرسم البياني للمسألة (١، ٥) والذي يمثل النقصان في قيمة الجانب الأيمن للقيد النشط (الثاني) والذي يُبقيه نشطاً مع القيد الثالث.

لكن يبقى السؤال ماهي قيمة المتغيرات وقيمة دالة الهدف إذا كان التغير في الجانب الأيمن للقيد النشط أقل من أو يساوي المدى المسموح به؟ وللإجابة على هذا السؤال لنفرض أن الجانب الأيمن للقيد الثاني زاد بقيمة Δ (حيث Δ هي قيمة أقل من أو تساوي الزيادة المسموح بها) فما هي قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف؟ حيث إن الزيادة ضمن المدى المسموح به فإن القيدين النشطين يصبحان:

$$5X_1 + 4X_2 \geq 20 + \Delta$$
$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$

و بحل المتراجحتين بعد تحويلهما إلى معادلتين نحصل على:

$$X_1 = \frac{(12 - \Delta)}{11}$$

$$X2 = 8 - \frac{(40 + 4\Delta)}{11}$$

و قيمة دالة الهدف كالتالي:

$$\text{New Z-value} = 5\ \frac{(12 - \Delta)}{11} + 2\ \frac{(40 + 4\Delta)}{11}$$

فلو كانت قيمة Δ تساوي ٢ وضمن الزيادة المسموح بها فما هي قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف؟ بالتعويض فإن قيمة $X_1 = 0.9090$ و$X_2 = 4.3636$ وقيمة دالة الهدف $Z = 13.2727$.

ثانياً: أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود غير النشطة على الحل الأمثل:

[Taylor III, 2010] و[Winston, 2004] و[Gould et al, 1991] و[Render et al., 2003]

إذا تغيرت قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود غير النشطة فإن ذلك سيُحدث تحركاً للخط المستقيم الممثل للقيد غير النشط بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير ولكن أثر هذا التحرك سيكون في أحد الاتجاهين إما يتجه نحو نقطة الحل الأمثل أو في الاتجاه المعاكس. هذا يعني أنه إذا تحرك الخط المستقيم للقيد لتغير قيمة جانبه الأيمن في الاتجاه المعاكس لنقطة الحل الأمثل فإنه سيبتعد عن نقطة الحل الأمثل وبالتالي فلن يكون له أي تأثير على الحل الأمثل مهما كانت قيمة هذا التغير حتى لو كانت مالا نهاية. أما إذا تحرك نحو مقطة الحل الأمثل فإنه سيكون له أثر على نقطة الحل الأمثل بعد التغير في قيمة جانبه الأيمن بمقدار معين.

كمثال على ذلك لنأخذ القيد الرابع للمسألة (١ ,٥) وكما في الشكل (١ ,٥). نلاحظ أن هذا القيد غير نشط لأنه لا يُقاطع نقطة الحل الأمثل A، وعندما نزيد الجانب الأيمن لهذا القيد فإنه سيتحرك إلى أعلى (اليمين) وسيبتعد عن نقطة الحل الأمثل A وبالتالي فالزيادة المسموح بها هنا هي مالا نهاية مما يعني أنه لا أثر لهذه الزيادة على الحل الأمثل الحالي إلا من ناحية أن منطقة الحلول الممكنة تكون أكبر. أما إذا نقص الجانب الأيمن فإنه سيقترب من نقطة الحل الأمثل A وعندها يمكن أن يتحول إلى قيد نشط. ولحساب قيمة هذا النقصان نعوض في الجانب الأيسر للقيد الرابع بقيم المتغيرات عند النقطة A بالشكل التالي:

$$7\,(1.0909) + 6\,(3.6363) = 29.4545$$

إذاً النقصان المسوح به يحسب بطرح القيمة السابقة من قيمة الجانب الأيمن الحقيقية كالتالي:

$$42 - 29.4545 = 12.5454$$

ثانياً: تحليل الحساسية والبرامج الحاسبية:

تقدم البرامج الحاسبية مثل LINDO مخرجات تحليل الحساسية عند حل أي برنامج خطي، وذلك لتسهيل قراءة وتحليل البيانات للمستخدمين. وتظهر النتائج كما في الشكل التالي (٤ , ٥):

```
Min 5X1 + 2X2
Subject to
3X1 + 6X2 >= 18
5X1 + 4X2 >= 20
8X1 + 2X2 >= 16
7X1 + 6X2 <= 42
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)     12.72727
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1              1.090909         0.000000
     X2              3.636364         0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)    7.090909                    0.000000
      3)    0.000000                   -0.272727
      4)    0.000000                   -0.454545
      5)    12.545455                   0.000000

NO. ITERATIONS=       3
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                 OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT      ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF              INCREASE             DECREASE
    X1          5.000000            3.000000             2.500000
    X2          2.000000            2.000000             0.750000
                 RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                 RHS             INCREASE            DECREASE
     2          18.000000           7.090909            INFINITY
     3          20.000000           8.117647            3.714286
     4          16.000000           8.666667            6.000000
     5          42.000000           INFINITY          12.545455
```

الشكل رقم (٤ , ٥). يوضح مخرجات برنامج LINDO للمسألة (١ , ٥).

و يمكن تفسير هذه المخرجات كالتالي **[Winston, 2004]**:

* **قيمة دالة الهدف Objective Function Value** : وهي قيمة دالة الهدف للصيغة الرياضية كما في الشكل (٤ , ٥). وهذه القيمة ١٢,٧٢٧٢ تظهر كقيمة للصف الأول حيث إن برنامج LINDO يتعامل مع دالة الهدف على اعتبار أنها الصف الأول في المصفوفة والقيد الأول على أنه الصف الثاني وهكذا.

* **قيم متغيرات القرار Decision Variables Value** : وهي قيم المتغيرات X_1 وX_2 كما في الشكل رقم (٤ , ٥).

* **المكمل أو الفائض Slack or Surplus** : وتمثل قيم المتغيرات المكملة لكل قيد، ويلاحظ هنا أن قيمة المتغيرات المكملة S_1 للقيد الأول (الصف الثاني) هي قيمة موجبة؛ وذلك لأن هذا القيد قيد غير نشط . أما في حالة القيد الثاني (الصف الثالث)، فإن قيمة المتغير المكمل S_2 تساوي صفراً، وذلك لأنه قيد نشط (كما أوضحنا سابقاً).

* **المدى الذي لا يتغير فيه الأساس RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED**: هو المدى الذي يمكن لقيم معاملات دالة الهدف أو قيم الجانب الأيمن في القيود أن تتغير دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل أي دون أن تتغير القيود النشطة.

* **مدى معاملات دالة الهدف Objective Coefficient Ranges** : هو المدى الذي يمكن فيه لمعاملات دالة الهدف أن تتغير دون أن تؤثر على الحل الأمثل الحالي، وهذا المدى يتمثل في الزيادة المسموح بها Allowable Increase والنقصان المسموح به Allowable Decrease. فإذا كانت الزيادة أو النقصان ضمن المدى المسموح به، فإن القيود النشطة لن تتغير، وكذلك قيم المتغيرات لن تتغير ولكن قيمة دالة الهدف ستتغير. كمثال على ذلك وفي شكل (٤ , ٥) لنفرض أن معامل X_1 انخفض بقيمة وحدة واحدة (ريال واحد) فما الذي سيحدث للحل الأمثل؟ بما أن النقصان ضمن المدى المسموح به (المدى المسموح به = ٥ , ٢) فإن:

١-القيود النشطة لن تتغير (سيظل الحل الأمثل الحالي كما هو)،

٢-قيم المتغيرات لن تتغير وستبقى A هي نقطة الحل الأمثل،

٣-لكن ستتغير قيمة دالة الهدف وتصبح كالتالي:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (\Delta c_1 \times X_1) = 12.72727 + (-1 \times 1.0909) = 11.63636$$

أما لو كانت الزيادة أو النقصان خارج نطاق المدى المسموح به، فإن المسألة يجب أن تُحل من جديد، وإن كان من الممكن معرفتها في حالتنا هذه؛ لأن عدد المتغيرات يساوي اثنين.

* **السعر الثنائي Dual Price**: ويُسمى أيضاً سعر الظل Shadow Price أو الربح الحدي وهو القيمة (عندما تكون موجبة) التي تتحسن فيها قيمة دالة الهدف إذا زادت قيمة الجانب الأيمن للقيد النشط (i) بوحدة واحدة بشرط أن التغير في الجانب الأيمن لا يغير الحل الأمثل الحالي (أي أنه ضمن المدى المسموح به) بمعنى أن القيود النشطة تبقى نشطة والعكس إذا كان السعر الثنائي قيمة سالبة.

قاعدة (٥ , ٥) [Gould et al., 1991]:
إذا كان القيد نشطاً، فإن السعر الثنائي يكون:
- سالباً إذا كان اتجاه القيد أكبر من أو يساوي.
- موجباً إذا كان اتجاه القيد أصغر من أو يساوي.
- سالباً، موجباً، أو صفراً إذا كان القيد معادلة.

مدى الجانب الأيمن Right-Hand Side Ranges : هو المدى الذي يمكن فيه لقيم الجانب الأيمن للقيود بالتغير دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالي، وهذا المدى يتمثل في الزيادة المسموح بها Allowable Increase والنقصان المسموح به Allowable Decrease. فإذا كانت الزيادة أو النقصان ضمن المدى المسموح به لقيدٍ نشطٍ فإن قيم المتغيرات ستتغير وقيمة دالة الهدف ستتغير، ولكن القيود النشطة لن تتغير. وكمثال على ذلك وفي شكل (٤ , ٥) لنفرض أن قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني (النشط) زادت بوحدة واحدة فما الذي سيحدث للحل الأمثل؟ بما أن الزيادة ضمن المدى المسموح به لقيدٍ نشطٍ (الزيادة المسموح بها = ١١٧٦ , ٨) فإن:

١-القيود النشطة لن تتغير (سيظل الحل الأمثل الحالي كما هو)

٢-قيم المتغيرات ستتغير ويمكن ايجادها بحل معادلتي القيدين النشطين (كما بيّنا سابقاً) كالتالي:

$$5X_1 + 4X_2 = 21 \qquad (1)$$
$$8X_1 + 2X_2 = 16 \qquad (2)$$

وبضرب المعادلة رقم ٢ في (2) نحصل على:

$$16X_1 + 4X_2 = 32 \qquad (3)$$

و بطرح ٣ من ١ وحل المعادلتين نحصل على التالي:

$X_2 = 4$ و $X_1 = 1$

٣-قيمة دالة الهدف ستتغير وتصبح $Z = 5 \times 1 + 2 \times 4 = 13$.

كما يمكن حساب قيمة دالة الهدف مباشرة من مخرجات برنامج LINDO ، وذلك باستخدام السعر الثنائي Dual Price. ويتم حساب قيمة دالة الهدف كالتالي: [Winston, 2004]

قاعدة (٦ , ٥):

1. Minimization Case:
   New Z-value = Old Z-value – ($\Delta RHS_{(i)} \times$ Dual $Price_{(i)}$)
2. Maximization Case:
   New Z-value = Old Z-value + ($\Delta RHS_{(i)} \times$ Dual $Price_{(i)}$)

فإذا زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بوحدة واحدة، فإن قيمة دالة الهدف الجديدة تساوي (Min Case):

$$\text{New Z-value} = 12.72727 - ((+1) \times -0.2727) = 13$$

أما لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بقيمة الزيادة المسموح بها، فإننا نحصل على حالة التحلل Degenerate Case والشكلان (٥ , ٢) و (٥ , ٥) يوضحان هذه الحالة (انظر مشكلة حالة التحلل في تحليل الحساسية في الملحق لهذا الباب) حيث إن القيد الرابع أصبح نشطاً بدليل أن قيمة المتغير المكمل لهذا القيد تساوي الصفر، لكن لاحظ أن قيمة السعر الثنائي لهذا القيد ما زالت صفراً؛ وذلك لأنه أصبح قيداً نشطاً، ونحن في حالة التحلل. ولو زادت قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني بقيمة أكبر من الزيادة المسموح بها ولو بقيمة صغيرة لخرجنا من حالة التحلل ولأصبح القيد الثاني والقيد الرابع نشطين، ولذلك فقيمة السعر الثنائي للقيد الثاني لا تساوي صفراً. كما يمكن أن نلاحظ أن قيمة النقصان المسموح به للقيد الرابع في الشكل (٥ , ٥) تساوي الصفر، مما يعني أنه عند هذه القيمة أصبح نشطاً ولو نقصت قيمة الجانب الأيمن للقيد الرابع بأي قيمة فإن الحل الأمثل سيتغير. ولو زادت قيمة الجانب الأيمن للقيد الرابع أي زيادة ولو كانت بسيطة فسيرجع إلى وضعه السابق كقيد غير نشط، وعليه فإن الزيادة المسموح بها للقيد الرابع ما لانهاية . وهذا كله بسبب أن القيد الرابع في ظاهره قيدٌ نشط، ولكن في حقيقته عند هذه النقطة هو قيدُ غير نشط، وهذا خاص بحالة التحلل. لاحظ أن المتغيرات الموجبة هي X_1, X_2, S_1 فقط وعدد القيود أربعة.

أما إذا كانت الزيادة أو النقصان لقيمة الجانب الأيمن لقيدٍ غير نشط ضمن المدى المسموح به فإن الحل الأمثل الحالي لن يتغير؛ لأن أثر التغير لهذا القيد غير النشط لا يؤثر على نقطة الحل الأمثل في هذه الحالة. فإذا زاد مثلاً الجانب الأيمن للقيد الأول (قيد غير نشط) بوحدة واحدة، فإن

هذه الزيادة ضمن المدى المسموح به، ولذلك فإن الحل الأمثل الحالي (القيود النشطة)، وقيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف لن يحدث فيهن أي تغير ويظهر ذلك جلياً عندما نلاحظ أن السعر الثنائي لهذا القيد يساوي صفراً. أما لو زاد الجانب الأيمن لهذا القيد بقيمة الزيادة المسموح بها وهي 7.090909 فإن ذلك يعني: ١) الحل الأمثل لن يتغير ٢) ولن تتغير قيم المتغيرات ٣) ولن تتغير قيمة دالة الهدف ولكن سيصبح القيد الأول قيداً نشطاً في ظاهره غير نشطٍ في حقيقته (كما في الشكل ٦ , ٥). أما إذا زاد عن قيمة الزيادة المسموح بها فإن الحل الأمثل سيتغير جذرياً، وسنحتاج إلى إعادة حل المسألة، وخاصة إذا كان عدد المتغيرات أكبر من اثنين.

قاعدة (٧ , ٥) [Gould et al, 1991] و[Winston, 2004]:

السعر الثنائي (سعر الظل) لا يساوي صفراً للقيود النشطة، لكن يمكن أن يساوي صفراً في حالة إذا كان القيد على شكل معادلة ويساوي صفراً للقيود غير النشطة.

إذا كان اتجاه القيد أكبر من للقيود غير النشطة، فإن النقصان المسموح به يساوي مالا نهاية والزيادة المسموح بها تساوي قيمة المتغير المكمل لنفس القيد.

إذا كان اتجاه القيد أصغر من للقيود غير النشطة، فإن الزيادة المسموح بها تساوي مالا نهاية والنقصان المسموح به تساوي قيمة المتغير المكمل لنفس القيد.

التكلفة المخفضة Reduced Cost: وتختص بمعاملات القرار فقط وقيمتها دائماً موجبة إذا كانت قيمة المتغير صفراً عند الحل الأمثل وقيمتها دائماً صفراً إذا كانت قيمة المتغير موجبة عند الحل الأمثل. وهي القيمة التي لو أُضيفت إلى معامل متغير القرار في دالة الهدف (في حالة Max)، والذي قيمته صفراً عند الحل الأمثل، فإن قيمة هذا المتغير ستتحول إلى قيمة موجبة. وتُطرح قيمة التكلفة المخفضة من معامل المتغير في دالة الهدف (في حالة Min) لتتحول قيمة المتغير إلى قيمة موجبة. ولذلك فإن قيمة التكلفة المخفضة لمتغيرات القرار الموجبة ستكون صفراً، وهي الحالة الموجودة في مثالنا كما في الشكل (٤ , ٥). لكن لو كان لدينا متغير قرار X قيمته تساوي الصفر عند الحل الأمثل وقيمة التكلفة المخفضة له تساوي ١٠٠ ريال وكانت المسألة Max وكان معامل هذا المتغير X في دالة الهدف ٥٠٠ ريال، فاذا أردنا تحويل X إلى قيمة موجبة (بمعنى أننا نريد أن ننتج من X)، فإننا يجب أن نزيد قيمة معامله في دالة الهدف بقيمة ١٠٠ ريال على الأقل أي تصبح قيمة المعامل ٦٠٠ ريال أو اكثر. هنا إذا كانت قيمة معامل X في دالة الهدف تساوي ٦٠٠ ريال فسيكون لدينا حلان: الأول يمثل الحل الأمثل الحالي أي لا ننتج من X، وتبقى قيم

المتغيرات الأخرى وقيمة دالة الهدف بدون تغيير، والثاني يتغير فيه الحل الأمثل الحالي (تتغير مجموعة القيود النشطة)، وتتغير قيمة X فتصبح قيمة موجبة، ولذلك تتغير قيم المتغيرات الأخرى، ولكن لا تتغير قيمة دالة الهدف، ولذلك يُسمى حل أمثل متعدد أو بديل. أما إذا كانت قيمة معامل X في دالة الهدف أكبر من ٦٠٠ ريال أي زاد معامل X في دالة الهدف زيادة أكبر من قيمة التكلفة المخفضة، فإن لحل الأمثل الحالي يتغير (تتغير مجموعة القيود النشطة)، وكذلك فإن قيم المتغيرات ستتغير وقيمة دالة الهدف ستتغير وتصبح X ذات قيمة موجبة.

```
Min 5X1 + 2X2
Subject to
3X1 + 6X2 >= 18
5X1 + 4X2 >= 28.117647
8X1 + 2X2 >= 16
7X1 + 6X2 <= 42
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
         1)  14.94118
 VARIABLE         VALUE         REDUCED COST
     X1           0.352941         0.000000
     X2           6.588235         0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)     22.588236       0.000000
     3)      0.000000       -0.272727
     4)      0.000000       -0.454545
     5)     5.000000        0.0000000
 NO. ITERATIONS=       3
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

               OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT     ALLOWABLE        ALLOWABLE
                COEF        INCREASE         DECREASE
   X1           5.000000     3.000000         2.500000
   X2           2.000000     2.000000         0.750000
               RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW        CURRENT      ALLOWABLE       ALLOWABLE
               RHS         INCREASE        DECREASE
    2        18.000000     22.588236       INFINITY
    3        28.117647      0.000000       11.831933
    4        16.000000     27.607843        0.000000
    5        42.000000      INFINITY        0.000000
```

الشكل رقم (٥ , ٥). يوضح مخرجات برنامج LINDO في حالة التحلل.

وتظهر قيمة التكلفة المخفضة تحت عمود الزيادة المسموح بها في مدى معاملات دالة الهدف للمتغير الذي قيمته تساوي الصفر عند الحل الأمثل، ويكون النقصان المسموح به يساوي ما لانهاية، وذلك في حال التعظيم(Max)، والعكس صحيح في حالة التخفيض (Min).

قاعدة (٨ ,٥) [Gould et al, 1991] و[Winston, 2004]:

إذا كان متغير القرار يساوي صفراً وأردنا تغيير قيمته إلى قيمة موجبة فيجب:

حالة Maximization: إضافة قيمة التكلفة المخفضة أو أكثر إلى معامل المتغير في دالة الهدف.

حالة Minimization: طرح قيمة التكلفة المخفضة أو أكثر من معامل المتغير في دالة الهدف.

```
Min 5X1 + 2X2
Subject to
3X1 + 6X2 >= 25.090909
5X1 + 4X2 >= 20
8X1 + 2X2 >= 16
7X1 + 6X2 <= 42
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)            12.72727
 VARIABLE       VALUE         REDUCED COST
     X1              1.090909       0.000000
     X2              3.636364       0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)      0.000000          0.000000
      3)      0.000000         -0.272727
      4)      0.000000         -0.454545
      5)     12.545455           0.000000
 NO. ITERATIONS=       0

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE    CURRENT       ALLOWABLE         ALLOWABLE
               COEF          INCREASE          DECREASE
    X1        5.000000        3.000000           2.500000
    X2        2.000000        2.000000           0.750000
              RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW        CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
                RHS        INCREASE         DECREASE
    2        25.090909        0.000000         INFINITY
    3        20.000000        8.117647          0.000000
    4        16.000000        0.000000          6.000000
    5        42.000000        INFINITY        12.545455
```

الشكل رقم (٦ ,٥). يوضح مخرجات برنامج LINDO في حالة أخرى التحلل.

ثالثاً: تحليل الحساسية وجداول السمبلكس:

[Gould et al, 1991] و[Winston, 2004] و[Render, 2003] و[Taylor III, 2010]:

يمكن استخدام جداول السمبلكس لمعرفة جميع القيم التي تظهر في مخرجات البرامج الحاسوبية. المسألة التالية ٥-٣ والجدول النهائي لحلها باستخدام السمبلكس يعطي مثالاً جيداً لإيضاح ذلك.

Min w = 6X1 + X2 + 3X3 –2X4

S.T.

$X1 + X2 \leq 42$

$2X1 + 3X2 - X3 - X4 \geq 10$

$X1 + 2X3 + X4 = 30$

$X1, X2, X3, X4 \geq 0$

		6	1	3	-2	0	0	M	M	
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**A_2**	**A_3**	**RHS**
0	S_1	0	0	-1/3	0	1	1/3	-1/3	-1/3	86/3
1	X_2	1	1	1/3	0	0	-1/3	1/3	1/3	40/3
-2	X_4	1	0	2	1	0	0	0	1	30
	Zj	-1	1	-11/3	-2	0	-1/3	1/3	-5/3	-140/3
Cj- Zj		7	0	20/3	0	0	1/3	M-1/3	M+5/3	

أولاً: السعر الثنائي [Gould et al, 1991] و[Winston, 2004] :

لاحظ أننا أبقينا المتغيرات الاصطناعية، وذلك لحاجتنا لها كما سيظهر لاحقاً. في هذه المسألة المتغيرات غير الأساسية هي X_1, X_3, S_2 ، وعليه فقيمة كلٍ منها يساوي صفراً. بما أن S_2 تساوي صفراً، فإن القيد الثاني قيدٌ نشط، وبما أن القيد الثالث على شكل معادلة، ولدينا حل أمثل فإن القيد الثالث قيدٌ نشط كذلك. وكما أوضحنا سابقاً فإن القيود النشطة يقابلها أسعار ثنائية لا تساوي الصفر، ولإيجاد هذه الأسعار الثنائية فيجب النظر إلى صف Zj بالنسبة للمتغيرات المكملة. بالنسبة للمتغير غير الأساسي S_2 والذي يمثل القيد الثاني فإن قيمة السعر الثنائي تساوي 1/3- ، وهي القيمة الموجودة في عمود S_2 وصف Zj. ويلاحظ أن هذه القيمة سالبة، وهي ناتجة من كون هذا القيد ذي

اتجاه أكبر من. بالنسبة للقيد النشط الآخر فهو القيد الثالث، وبما أن هذا القيد على شكل معادلة فإن قيمة السعر الثنائي توجد في عمود A_3؛ (لأن هذا القيد لا يحتوي على متغير مكمل) وصف Zj ، ولكن بعد عكس الإشارة. أما بالنسبة للقيود غير النشطة مثل القيد الأول، فإن السعر الثنائي المقابل لها يساوي الصفر، وهي موجودة كذلك في الصف Zj وعمود S_1.

القيد	حالة القيد	المتغير المؤثر	السعر الثنائي
الأول	غير نشط	S_1	0
الثاني	نشط	S_2	-1/3
الثالث	نشط	A_3	5/3

قاعدة (٩ , ٥) [Gould et al, 1991] و[Winston, 2004]:

الأسعار الثنائية هي القيمة الموجودة في صف Zj للمتغيرات المكملة للقيد.

إذا كان القيد على شكل معادلة، فإن قيمة السعر الثنائي توجد في صف Zj للمتغير الاصطناعي للقيد بعد عكس الإشارة.

قاعدة (١٠ , ٥) [Winston, 2004]:

للقيود النشطة:

المتغيرات المحددة هي المتغيرات الأساسية في الجدول الأول للسمبلكس.

الزيادة المسموح بها هي أصغر قيمة مطلقة للنسبة $[\{RHS_{(i)}/a_{ij}\}]$ بحيث $a_{ij}<0$، فإن لم نجد فهي مالانهاية.

النقصان المسموح به هو أصغر قيمة للنسبة $[\{RHS_{(i)}/a_{ij}\}]$ بحيث $a_{ij}>0$، فإن لم نجد فهي ما لانهاية.

a_{ij}: معامل المتغير المحدد في الصف i والعمود j، ولا تُقبل إذا كانت $a_{ij}=0$.

للقيود غير النشطة:

النقصان المسموح به يساوي قيمة المتغير المكمل والزيادة المسموح بها تساوي مالا نهاية إذا كان القيد ذا اتجاه أصغر من، والعكس صحيح إذا كان اتجاه القيد أكبر من.

$RHS_{(i)}$: الجانب الأيمن للقيد i.

ثانياً: التغير في قيم الجانب الأيمن[Gould et al, 1991] و[Winston, 2004] :

يمكن إيجاد الزيادة المسموح بها والنقصان المسموح به من جداول السمبلكس، وذلك باتباع القاعدة التالية:

أ) التغير في قيم الجانب الأيمن للقيود النشطة: في مثالنا هذا نلاحظ أن القيد الثاني (قيد نشط)، وعليه فإن المتغير المحدد هو المتغير A_2 ؛ وذلك لأن المتغير الاصطناعي A_2 كان المتغير الأساسي في الجدول الأول، وبناء على ذلك فإن الزيادة المسموح بها تكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_2 في الجدول الأخير ذات القيم السالبة ثم تحويل هذه القيم إلى قيم مطلقة، ومن ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة لا يوجد غير قيمة واحدة سالبة في عمود A_2 ، وهي (1/3-)، ولذلك بعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيمة نحصل على الزيادة المسموح بها، وهي 86. بالنسبة للنقصان المسموح به يكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_2 في الجدول الأخير ذات القيم الموجبة ومن ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة لا يوجد غير قيمة واحدة موجبة وهي (1/3) في عمود A_2 ، ولذلك بعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيمة نحصل على النقصان المسموح به وهو 40. أما بالنسبة للقيد الثالث فإن الزيادة المسموح بها تكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_3 في الجدول الأخير ذات القيم السالبة ثم تحويل هذه القيم إلى قيم مطلقة، ومن ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة لا يوجد غير قيمة واحدة سالبة في عمود A_3 ، ولذلك بعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيمة نحصل على الزيادة المسموح بها وهي 86. بالنسبة للنقصان المسموح به يكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_3 في الجدول الأخير ذات القيم الموجبة، ومن ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة يوجد قيمتان موجبتان في عمود A_3 وهما (1/3 و1)، وبعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيم فنحصل على (40 و30) و30 هي القيمة الأصغر، ومن ثم النقصان المسموح به يساوي 30.

ب) التغير في قيم الجانب الأيمن للقيود غير النشطة: في مثالنا هذا نلاحظ أن القيد الأول غير نشط، وبتطبيق القاعدة السابقة فالنقصان المسموح به يساوي قيمة المتغير المكمل S_1 وهو 86/3 ؛ وذلك لأن اتجاه القيد أصغر من، أما الزيادة المسموح بها فتساوي مالا نهاية، وذلك لنفس السبب. ولو كان القيد الأول ذا اتجاه أكبر من لكان النقصان المسموح مالا نهاية والزيادة المسموح بها قيمة المتغير المكمل.

ثالثاً: التكلفة المخفضة ومدى معاملات دالة الهدف [Gould et al, 1991] و[Winston, 2004] :

توجد قيم التكلفة المخفضة في الصف Cj-Zj وذلك لمتغيرات القرار فقط. فإذا كان متغير القرار متغيراً غير أساسي، فإن قيمة التكلفة المخفضة له هي القيمة المطلقة في صف Cj-Zj، وبالنسبة لمتغيرات القرار إذا كانت أساسية، فإن التكلفة المخفضة تساوي الصفر دائماً. في مثالنا هذا المسألة (٥ , ٣) نجد أن المتغيرين X_1 وX_3 هما متغيرا القرار غير الأساسيين، ولذلك فتكلفتهما المخفضة هي 7 و40/6 على التوالي وهي في الوقت نفسه قيمة النقصان المسموح به لمعاملات دالة الهدف حيث إن المسألة Min. لكن لو كانت المسألة Max فإن قيمة التكلفة المخفضة لمتغيرات القرار غير الأساسية ستكون هي الزيادة المسموح بها.

أ) معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف: في مثالنا هذا المتغيران X_1 وX_3 هما متغيرا القرار غير الأساسيين، ولهذا فإن قيمة النقصان المسموح به هي تكلفتهما المخفضة، وهي (7 و40/6 على التوالي) حيث إن المسألة Min كما ذكرنا سابقاً ولنفس السبب (المسألة Min) فإن الزيادة المسموح بها لمعاملاتها في دالة الهدف تساوي مالا نهاية حيث إن هذه المتغيرات لم يتم اعتبارها أساسية، وهي بقيم معاملاتها الحالية. والوضع سيكون أسوأ عند زيادة قيمة معاملاتها في دالة الهدف في الوقت الذي نرغب فيه في تخفيض قيمة دالة الهدف (تخفيض التكاليف مثلاً). (لاحظ أن العكس صحيح في حالة Max حيث سيكون النقصان المسموح به يساوي مالا نهاية، وقيمة التكلفة المخفضة، الموجودة في صف Cj-Zj، هي الزيادة المسموح بها. لماذا؟)

و تظهر هذه القيم كذلك في مدى معاملات دالة الهدف تحت عمود النقصان المسموح به الشكل(٧ , ٥)؛ لأن المسألة Min، وتظهر قيم مالا نهاية تحت عمود الزيادة المسموح بها؛ لأن الزيادة لن تغير في الحل الأمثل مهما كانت قيمتها.

ب) معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف: بالنسبة لمتغيرات القرار الأساسية X_2 وX_4، فإن هذا المدى سيظهر كالتالي: لو أضفنا إلى معامل X_2 قيمة تساوي Δ حيث ($\Delta>0$) عند الزيادة و($\Delta<0$) عند النقصان، فإن جدول السمبلكس النهائي سيظهر كالتالي: (لاحظ أن التأثير سيقع في صف Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية ودالة الهدف فقط).

		6	1+Δ	3	-2	0	0	
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**RHS**
0	S_1	0	0	-1/3	0	1	1/3	86/3
1+Δ	X_2	1	1	1/3	0	0	-1/3	40/3
-2	X_4	1	0	2	1	0	0	30
	Zj	-1+Δ	1+Δ	-11/3-Δ/3	-2	0	-1/3-Δ/3	-140/3+40Δ/3
Cj- Zj		Δ−7	0	20/3+Δ/3	0	0	1/3+Δ/3	

و الآن حتى يبقى الحل الأمثل كما هو، فإن قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية يجب أن تكون موجبة أو تساوي صفراً؛ لأن المسألة Min. ولتحقيق ذلك نقوم بالتالي بالنسبة لقيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية:

$7 - \Delta \geq 0$ ====➔ $7 \geq \Delta$

$20/3 -$ ١$\Delta/3 \geq 0$ ====➔ $20 \geq \Delta$

$1/3 + \Delta/3 \geq 0$ ====➔ $1 \geq -\Delta$ ====➔ $-1 \leq \Delta$

الزيادة المسموح بها هي أصغر قيمة موجبة تساويها Δ: {min(7,20)} وهي هنا 7.

النقصان المسموح به هو القيمة المطلقة لأصغر قيمة سالبة تساويها Δ: {min(-1)} وهـــي هنا 1-. إذاً النقصان المسموح به يساوي 1.

و يمكن عمل نفس الشيء بالنسبة للمتغير X_4 كالتالي:

		6	1	3	-2+Δ	0	0	
BC	**BV**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**RHS**
0	S_1	0	0	-1/3	0	1	1/3	86/3
1	X_2	1	1	1/3	0	0	-1/3	40/3
-2+Δ	X_4	1	0	2	1	0	0	30
	Zj	-1+Δ	1	-11/3-Δ/3	-2+Δ	0	-1/3	0Δ٣-140/3+
Cj- Zj		Δ−7	0	20/3+Δ/3	0	0	1/3	

$7 - \Delta \geq 0$ ====➔ $7 \geq \Delta$
$20/3 - 2\Delta \geq 0$ ====➔ $10/3 \geq \Delta$

الزيادة المسموح بها هي أصغر قيمة موجبة تساويها Δ: {min(7,10/3)} وهي هنا 10/3.

حيث لا يوجد قيمة سالبة تساويها Δ ، فالنقصان المسموح به يساوي مالا نهاية.

الشكل رقم (٥ ,٧). يظهر هذه القيم في مخرجات برنامج LINDO.

```
Min  6X1 + X2 + 3X3 -2X4
Subject to
 X1 +  X2                <= 42
2X1 + 3X2 -  X3 -   X4  >= 10
 X1 +        2X3 +  X4 = 30
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)      - 46,66667
 VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
     X1             0.000000         7.000000
     X2            13.333333         0.000000
     X3             0.000000         6.666667
     X4            30.000000         0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    2) 28,666666         0,000000
    3) 0,0000000      -0,333333
    4)  0.0000000       1,666667
 NO. ITERATIONS=       3
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                COEF            INCREASE          DECREASE
    X1              6.000000         INFINITY           7.000000
    X2              1.000000         7.000000           1.000000
    X3              3.000000         INFINITY           6.666667
    X4             -2.000000         3.333333           INFINITY
                RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW          CURRENT         ALLOWABLE         ALLOWABLE
                RHS            INCREASE          DECREASE
    2          42,000000         INFINITY         28.666666
    3          10,000000         85,999992        39,999996
    4          30,000000         30,0000000       85,999992
```

الشكل رقم (٥ ,٧). يوضح اثر التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

العلاقة بين الجانب الأيمن للقيود ودالة الهدف:

سنتحدث هنا عن العلاقة بين قيم الجانب الأيمن للقيود، وقيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل، وكيفية اتخاذ القرارات حيال هذه العلاقة. سنبدأ بعرض المسألة التالية (٥ ,٤)، لإيضاح ذلك:

مسألة (٥ ,٤): تقوم شركة الرياض للجلود بتصنيع أربعة أنواع من حقائب رجال الأعمال، وتستلزم عملية إنتاج الحقيبة إلى كمية من المواد الخام الممثلة بالجلود وساعات عمل لحياكة هذه الجلود. يمثل الجدول التالي المواد الخام بالقدم المربع، وساعات العمل اللازمة لإنتاج كل نوع،

وسعر البيع للوحدة الواحدة من كل نوع. حالياً، تملك الشركة ٥٠٠٠ قدم مربع من الجلود و٦٠٠٠ ساعة عمل، ولتلبية طلبات العملاء فلابد من إنتاج ٩٠٠ حقيبة منها على الأقل ٣٠٠ من النوع الرابع. المطلوب حل هذه المسالة على شكل برنامج خطي لتعظيم حجم المبيعات.

المدخلات	النوع ١	النوع ٢	النوع ٣	النوع ٤
مواد خام للوحدة	٢	٣	٥	٦
ساعات العمل للوحدة	٣	٤	٧	٩
سعر البيع للوحدة	٢٥٠	٣٠٠	٤٠٠	٤٥٠

يمكن كتابة الصيغة الرياضية لهذه المسالة على شكل برنامج خطي كالتالي:

Xj= عدد الحقائب المنتجة من النوع j. حيث j = 1,2,3,4

	Max $250X_1 + 300X_2 + 400X_3 + 450X_4$ Subject to
قيد الطلب على جميع الأنواع	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 900$
قيد المواد الخام	$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 6X_4 \leq 5000$
قيد ساعات العمل	$3X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 9X_4 \leq 6000$
قيد كمية الإنتاج من النوع الرابع	$X_4 \geq 300$
	$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

في هذه المسألة نلاحظ أن قيمة دالة الهدف ٣٤٥٠٠٠ ريال كما في الشكل (٨ , ٥) ، وهذه القيمة ناتجة من الالتزام بالشروط المصاغة رياضياً على شكل قيود. ماذا لو قمنا بتغيير قيم الجانب الأيمن للقيود، ماذا يحدث لدالة الهدف؟ تحدثنا سابقاً عن أثر التغير في قيم الجانب الأيمن على دالة الهدف، وأوضحنا أنه يوجد مدى مسموح به لقيم الجانب الأيمن تظل فيه القيود النشطة نشطة (لا يتغير الحل الأمثل)، وفي ظل هذا المدى المسموح به تتغير قيمة دالة الهدف تبعاً لتغير قيمة الجانب الأيمن إذا كان القيد نشطاً، ولا تتغير قيمة دالة الهدف إذا كان القيد غير نشطٍ. هذا التغير يكون بإضافة أو طرح حجم التغير مضروباً في السعر الثنائي حسب القاعدة المذكورة سابقاً (٦ , ٥).

```
Max 250X1 + 300X2 + 400X3 + 450X4
Subject to
X1 + X2 + X3 + X4 = 900
2X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 <= 5000
3X1 + 4X2 + 7X3 + 9X4 <= 6000
X4 >= 300
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)    345000.0
 VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
     X1              0.000000         16.666666
     X2           300.000000           0.000000
     X3           300.000000           0.000000
     X4           300.000000           0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           0,000000                  166,666672
      3)           800,000000                0.000000
      4)           0,000000                  33.333332
      5)           0.000000                 -16.666666
NO. ITERATIONS=       4

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                 OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
    X1           250.000000       16.666668         INFINITY
    X2           300.000000       24.999998        12.500002
    X3           400.000000       50.000004        10.000000
    X4           450.000000       16.666666         INFINITY
                 RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW            CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
     2          900.000000      225.000000       128.571426
     3         5000.000000       INFINITY        800.000000
     4         6000.000000      900.000000       900.000000
     5          300.000000      180.000000       300.000000
```

الشكل رقم (٨ ,٥). يوضح مخرجات برنامج LINDO للمسألة (٤ ,٥).

لكن ماذا يحدث إذا كان التغير خارج المدى المسموح به [Winston, 2004]، كمثال على ذلك لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثالث، وهو قيد نشط ذا اتجاه أصغر من بوحدة واحدة أكثر من الزيادة المسموح بها فأصبحت قيمة الجانب الأيمن ٦٩٠١. بما أن الزيادة أكبر من الزيادة المسموح بها، فإن هذا يعني أن الحل الأمثل الحالي سيتغير (ستتغير مجموعة القيود النشطة)، لكن قيمة دالة الهدف ستستمر في التزايد (التحسن) لكن بقيمة السعر الثنائي الجديد ٢٥ ريالاً لكل ساعة إضافية كما في الشكل (٩ ,٥) ، وستستمر هذه القيمة للسعر الثنائي حتى الزيادة المسموح بها الجديدة وهي ٤٠٠ ساعة عمل أي عندما نصل للحد الأعلى الجديد، وهو ٧٣٠٠ ، وهنا ستتغير قيمة السعر الثنائي بعد

هذا الحد فعند ٧٣٠١ ساعة عمل تصبح قيمة السعر الثنائي الجديدة صفراً كما في الشكل (١٠ , ٥) ، حيث يتحول هذا القيد إلى قيدٍ غير نشط، ويكون هناك فائضٌ في ساعات العمل بعد ٧٣٠٠ ساعة عمل مع بقاء جميع العناصر الأخرى ثابتة كما هي.

```
Max 250X1 + 300X2 + 400X3 + 450X4
Subject to
X1 + X2 + X3 + X4 = 900
2X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 <= 5000
3X1 + 4X2 + 7X3 + 9X4 <= 6901
X4 >= 300
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)      375025.0
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1            0.000000         50.000000
     X2            0.000000         25.000000
     X3          599.500000          0.000000
     X4          300.500000          0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)             0.000000          225.000000
     3)           199.500000            0.000000
     4)             0.000000           25.000000
     5)             0.500000            0.000000
 NO. ITERATIONS=       0
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
     X1         250.000000       50.000000         INFINITY
     X2         300.000000       25.000000         INFINITY
     X3         400.000000       50.000000        10.000000
     X4         450.000000       16.666666        50.000000
                RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW       CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
                RHS          INCREASE         DECREASE
     2        900.000000      0.142857        133.222229
     3       5000.000000      INFINITY        199.500000
     4       6901.000000    399.000000          1.000000
     5        300.000000      0.500000         INFINITY
```

الشكل رقم (٩ , ٥). يوضح أثر الزيادة على قيمة الجانب الأيمن للقيد الثالث بوحدة واحدة أكثر من الزيادة المسموح بها.

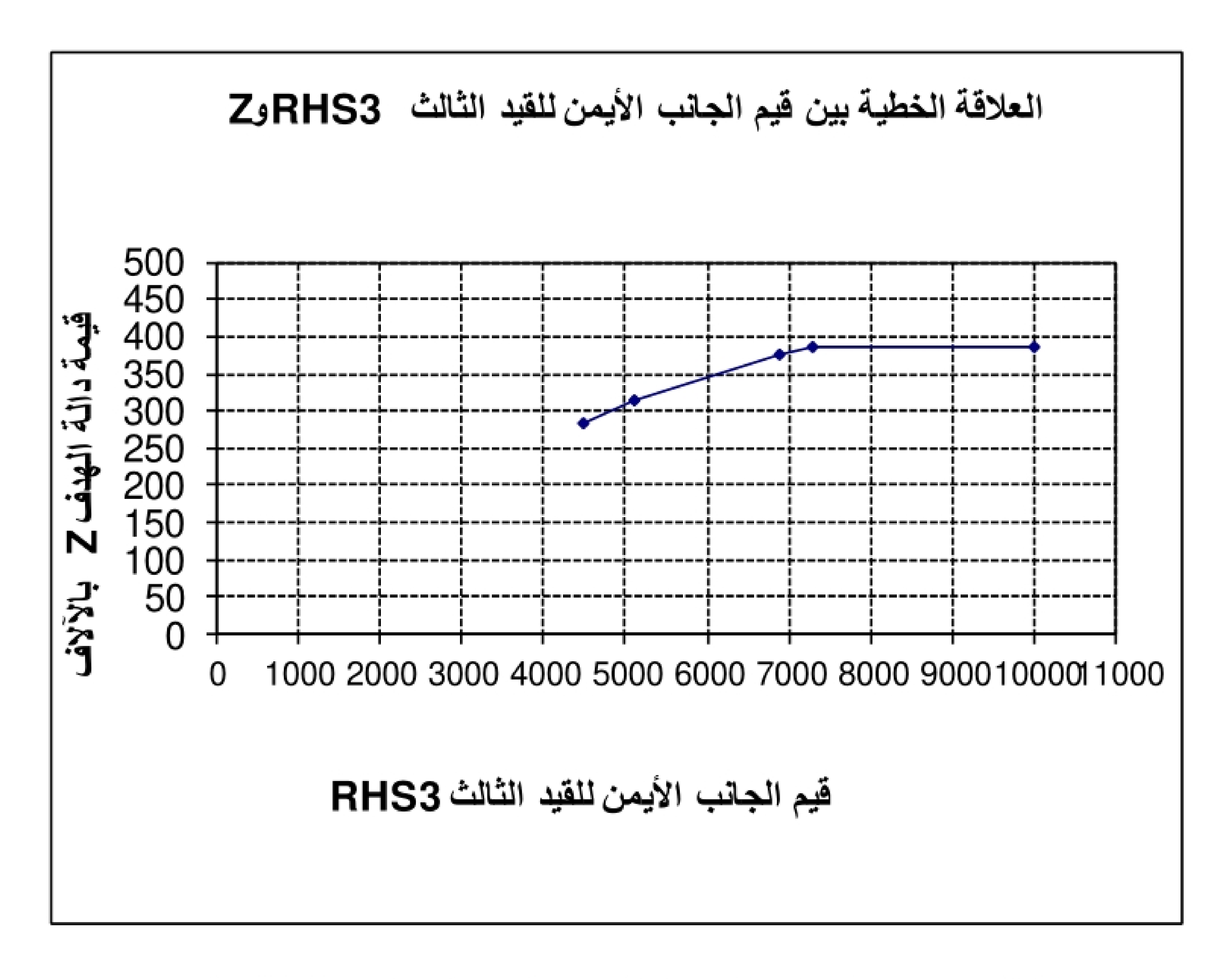
بالمثل لو نقص الجانب الأيمن للقيد الثالث بقيمة أكثر من المسموح بها، وهي ٩٠٠ ساعة عمل فأصبح ٥٠٩٩ ساعة مثلاً. حيث إن النقصان أكبر من المسموح به، فإن هذا يعني أن الحل الأمثل الحالي سيتغير (ستتغير مجموعة القيود النشطة)، لكن قيمة دالة الهدف ستستمر في الانخفاض

(تسوء)، لكن بقيمة السعر الثنائي الجديد ٥٠ ريالاً لكل ساعة ناقصة كما في الشكل (٥,٩)، وتستمر هذه القيمة الجديدة عند خفض الجانب الأيمن للقيد الثالث حتى الحد الأدنى للنقصان المسموح به الجديد، وهو ٤٥٠٠ ساعة أي بنقصان مسموح به يساوي ٦٠٠ ساعة عمل. إذا استمررنا في خفض قيمة الجانب الأيمن بأكثر ٦٠٠ ساعة أي لو خفضنا قيمة الجانب الأيمن للقيد الثالث فأصبحت ٤٤٩٩ ساعة، فإن المسألة ستتحول إلى مسألة غير ممكنة الحل (INFEASIBLE).

```
Max 250X1 + 300X2 + 400X3 + 450X4
Subject to
X1 + X2 + X3 + X4 = 900
2X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 <= 5000
3X1 + 4X2 + 7X3 + 9X4 <= 7300
X4 >= 300
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)      385000.0
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1              0.000000          0.000000
     X2              0.000000          0.000000
     X3            400.000000          0.000000
     X4            500.000000          0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
     2)                0.000000          150.000000
     3)                0.000000           50.000000
     4)                0.000000            0.000000
     5)              200.000000            0.000000
 NO. ITERATIONS=      0
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                 OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF             INCREASE          DECREASE
    X1            250.000000          0.000000          INFINITY
    X2            300.000000          0.000000          INFINITY
    X3            400.000000         50.000000          0.000000
    X4            450.000000          0.000000         50.000000
                 RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS             INCREASE          DECREASE
     2          900.000000        40.000000          0.000000
     3         5000.000000         0.000000        200.000000
     4         7300.000000        INFINITY           0.000000
     5          300.000000       200.000000         INFINITY
```

الشكل رقم (٥,١٠). يوضح قيمة السعر الثنائي للقيد الثالث بعد تجاوز الزيادة المسموح بها الحد الأقصى للجانب الأيمن للقيد الثالث.

هنا لا بد من ملاحظة أنه عند الرسم البياني الشكل رقم (١١ , ٥) لدالة الهدف كدالة في قيم الجانب الأيمن للقيد الثالث (قيد نشط ذا اتجاه أصغر من)، فإن الخط البياني يتكون من مجموعة مستقيمات أو قطع مستقيمة لكلٍ منها ميل يمثل قيمة السعر الثنائي في كل مدى مسموح به [Winston, 2004]. وحيث إن هذه المسألة على شكل Max والقيد ذو اتجاه أصغر من، فإن ميل كل قطعة مستقيمة تكون غير سالبة، مما يعني أن إضافة موارد جديدة لهذا القيد هي إضافة نافعة، وستحسن من قيمة دالة الهدف. كما نلاحظ في الشكل رقم (١١ , ٥) والجدول رقم (١ , ٥) أن ميول هذه القطع المستقيمة (الأسعار الثنائية) تكون متناقصة حيث إنه مع زيادة قيمة الجانب الأيمن تتناقص الأسعار الثنائية من ٥٠ إلى ٣٣,٣٣ إلى ٢٥ إلى صفر، ويمكن تفسيرها بالقاعدة الاقتصادية تناقص الغلة (Diminishing Rate Of Returns)، والتي تعني أنه كلما زادت موارد محددة مع بقاء باقي الموارد كما هي، فإن المنفعة الكلية تزداد، ولكن بشكل متناقص حتى تصل إلى نقطة معينة تقف عندها ثم تبدأ في الانخفاض.



الشكل رقم (١١ , ٥). يوضح العلاقة الخطية بين قيم الجانب للقيد الثالث وقيمة دالة الهدف.

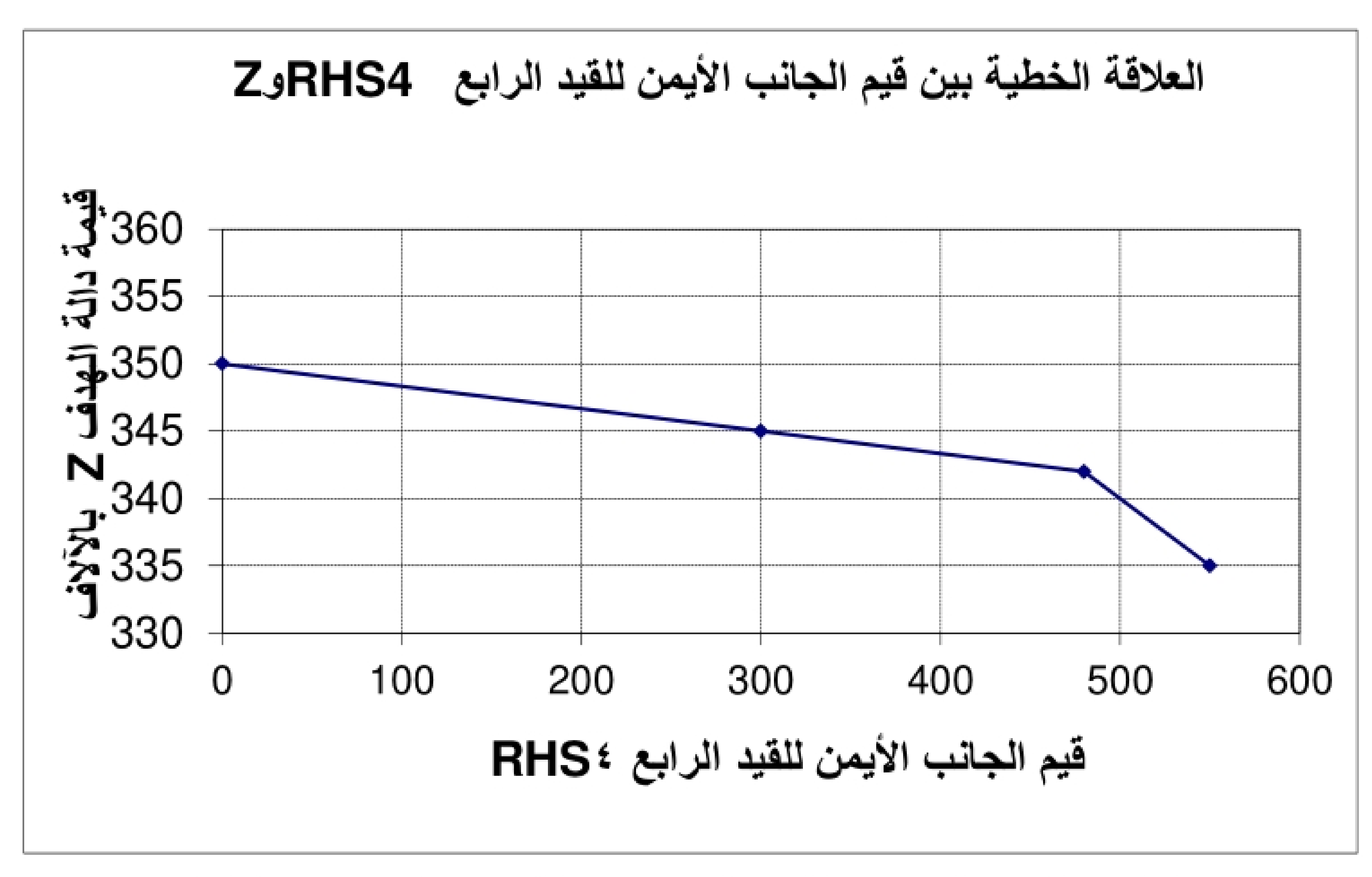
الجدول رقم (١ , ٥). يوضح تناقص قيمة السعر الثنائي مع زيادة قيمة الجانب الأيمن للقيد الثالث.

الجانب الأيمن	السعر الثنائي	قيمة دالة الهدف	الأثر على قيمة دالة الهدف
$RHS < 4500$	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل
$4500 \le RHS < 5100$	50	تعتمد على مقدار التغير	تزداد مع الزيادة وتنقص مع النقصان
$5100 \le RHS \le 6900$	33,33	تعتمد على مقدار التغير	تزداد مع الزيادة وتنقص مع النقصان
$6900 < RHS \le 7300$	25	تعتمد على مقدار التغير	تزداد مع الزيادة وتنقص مع النقصان
$RHS > 7300$	0	385.000	تثبت
10.000	0	385.000	

كما يمكن ملاحظة علاقة الجانب الأيمن للقيد الرابع (وهو قيد نشط ذو اتجاه أكبر من) بدالة الهدف الموضح في الشكل رقم (١٢ , ٥) ، وذلك لمسألة Max بأنها يمكن تمثيلها بمجموعة من المستقيمات ذات ميول غير موجبة (أسعار ثنائية)؛ لأن اتجاه القيد أكبر من كما ذكرنا سابقاً في القاعدة ٥-٥. كما نلاحظ أن ميول القطع المستقيمة متناقصة كما في الجدول رقم (٢ , ٥).

الجدول رقم (٢ , ٥). يوضح تناقص قيمة السعر الثنائي مع زيادة قيمة الجانب الأيمن للقيد الرابع.

الجانب الأيمن	السعر الثنائي	دالة الهدف	الأثر على قيمة دالة الهدف
$0 \le RHS \le 480$	-16.6666	تعتمد على مقدار التغير	تنقص مع الزيادة وتزداد مع النقصان
300	-16.6666	345000	
$480 < RHS \le 550$	-100	تعتمد على مقدار التغير	تنقص مع الزيادة وتزداد مع النقصان
550	-100	335000	
$RHS > 550$	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل

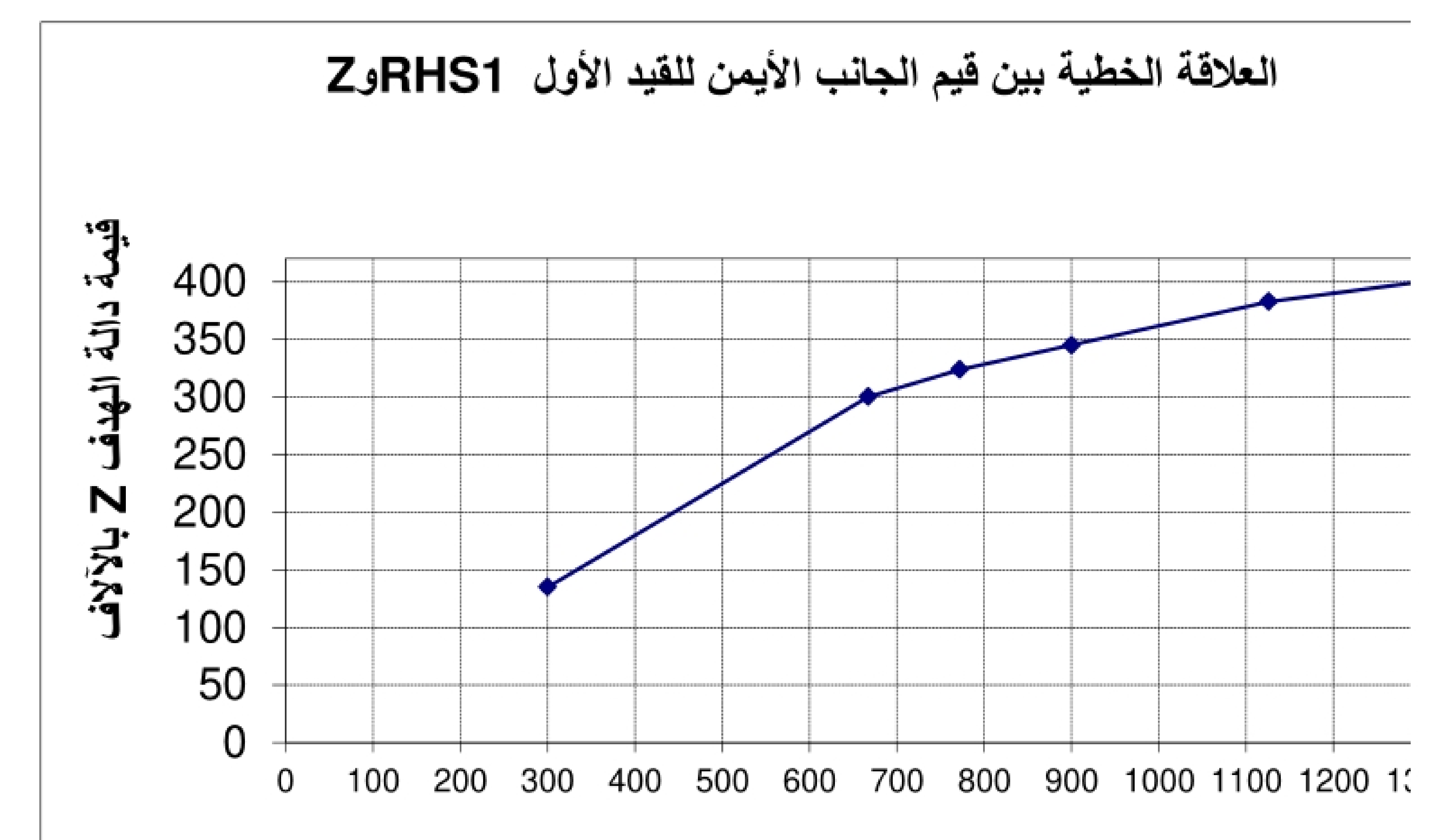


الشكل رقم (٥,١٢). يوضح العلاقة الخطية بين قيم الجانب للقيد الرابع وقيمة دالة الهدف.

في حالة القيد الأول والذي على شكل معادلة، فإن علاقة الجانب الأيمن بدالة الهدف والموضحة في الشكل رقم (٥,١٣) ، تكون كذلك ممثلة بمجموعة من المستقيمات ذات ميول (أسعار ثنائية) موجبة أو سالبة كما في القاعدة ٥-٥ ، وهذه الميول تكون متناقصة كذلك، كما في الجدول رقم (٥,٣).

الجدول رقم (٥,٣). يوضح تناقص قيمة السعر الثنائي مع زيادة قيمة الجانب الأيمن للقيد الأول.

الجانب الأيمن	السعر الثنائي	دالة الهدف
أقل من 300	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل
300	450	135000
667	225	300075
772	166,666	7,323666
900	166,666	345000
1125	166,666	382500
1126	100	382600
1400	100	410000
أكثر من 1400	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل



الشكل رقم (١٣ , ٥). يوضح العلاقة الخطية بين قيم الجانب للقيد الأول وقيمة دالة الهدف.

في حالة Min ، فإن الوضع ينعكس [Winston, 2004]، حيث إن العلاقة ممثلة بمجموعة من المستقيمات لكنها ذات ميول متزايدة. للقيود النشطة ذات الاتجاه أصغر من يكون ميل القطع المستقيمة سالبة (الأسعار الثنائية مع عكس الإشارة)، وللقيود ذات الاتجاه أكبر من تكون ميول القطع المستقيمة موجبة (الأسعار الثنائية مع عكس الإشارة). يمثل الجدول رقم (٤ , ٥) العلاقة بين الجانب الأيمن للقيود، ودالة الهدف.

الجدول رقم (٤ , ٥). يوضح العلاقة بين تجاه القيد وميول القطع المستقيمة.

حالة مسألة LP	اتجاه القيد	ميول القطع المستقيمة
Max	أصغر من أو يساوي	موجبة ومتناقصة
Max	أكبر من ويساوي	سالبة ومتناقصة
Max	يساوي	سالبة أو موجبة ومتناقصة
Min	أصغر من أو يساوي	سالبة ومتزايدة
Min	أكبر من ويساوي	موجبة ومتزايدة
Min	يساوي	سالبة أو موجبة ومتزايدة

اتخاذ القرارات لهذه العلاقة:

إن معرفة هذه العلاقة تساعد متخذ القرار في معرفة مدى وحجم الاستثمار في الموارد (ساعات العمل، المواد الخام، ..، وغيرها) والتي يمكنه الاستثمار بها لتعظيم العائد الإجمالي. على سبيل المثال لو كانت تكلفة ساعة العمل الإضافية ٢٠ ريالاً (بافتراض أن تكلفة الساعة الإضافية غير محسوبة ضمن التكلفة الكلية) فيمكن لمتخذ القرار الاستثمار في ساعات العمل بزيادتها إلى ٧٣٠٠ ساعة (أي بزيادة قدرها ١٣٠٠ ساعة عمل)، ويمكن اتخاذ مثل هذا القرار بمعرفة أن ساعة العمل الإضافية تعطي ٣٣,٣٣ ريالاً في التسعمائة ساعة الأولى أي إلى ٦٩٠٠ ساعة، ثم ينخفض هذا العائد إلى ٢٥ ريالاً في الأربعمائة ساعة التالية حتى ٧٣٠٠ ساعة، وعلى هذا فإنه بمقارنة تكلفة الساعة الإضافية الواحدة مع العائد الإضافي للساعة الواحدة نجد أن من المصلحة زيادة ساعات العمل، ونتوقف عندما تكون تكلفة ساعة العمل الإضافية أكبر من العائد الإضافي للساعة الواحدة.

و لو افترضنا أن ساعة العمل الواحدة تكلف ٣٠ ريالاً فإنه من المنفعة زيادة ساعات العمل حتى ٦٩٠٠ ساعة عمل فقط، ونتوقف بعدها عن الزيادة على الرغم من إمكانية زيادة قيمة العائدات الكلية، حيث السعر الثنائي ما يزال موجباً في المرحلة التالية (أكثر من ٦٩٠٠ وأقل او تساوي ٧٣٠٠ ساعة عمل). ويمكن تعليل ذلك بأن أي ساعة إضافية ستستهلك من صافي الأرباح الكلية للمنشأة بقيمة ٥ ريالات لكل ساعة، والتي تمثل الفرق بين تكلفة الساعة الإضافية والسعر الثنائي الجديد ٢٥ ريالاً (السعر العادل أو السعر الحقيقي الأقصى لساعة العمل الواحدة من وجهة نظر المنشأة في هذه المرحلة بغض النطر عن سعر السوق لساعة العمل الواحدة).

الأثر على صافي الأرباح = (السعر الثنائي لساعات العمل – تكلفة ساعة العمل الواحدة) × ساعات العمل

كمثال على ذلك، لو زدنا ساعات العمل بعد ٦٩٠٠ ساعة بعدد ١٠ ساعات إضافية، وتكلفة الساعة الإضافية ٣٠ ريالاً، فإن الأثر على صافي الأرباح الكلية سيكون كالتالي:

الأثر على صافي الأرباح الكلية = (٢٥ – ٣٠) × ١٠ = –٥٠ ريالاً

إذاً هذا الأثر سلبي وضار للمنشأة من ناحية الأرباح الكلية.

إضافة متغير جديد إلى المسألة:

إن إضافة متغير جديد إلى مسألة البرنامج الخطي سيضيف تعقيدات جديدة لحل المسألة. لنأخذ المسألة التالية لتوضيح الحالة:

مسألة رقم (٥ , ٥):

ينتج المصنع الوطني للمكيفات الصحراوية أربعة أنواع من المكيفات ذات مقاسات مختلفة (حصان ونصف، حصان واحد، ٠,٧٥ حصان، ٠,٥ حصان). تقوم العمالة في المصنع بعمل الوصلات الكهربائية، وتصنيع الصندوق الخارجي، وتركيب القش، وتغليف المنتج، خاصةً أن المكيفات تأتي مُصنّعة جزئياً حيث إن المضخات، والمولدات الكهربائية، ومفاتيح التكييف تُشترى من موردين محليين بأسعار محددة مسبقاً. يبين الجدول التالي 5-5 الموارد المطلوبة لكل منتج:

الجدول رقم (٥ , ٥). يوضح الموارد المطلوبة لكل منتج في المسألة رقم (٥ , ٥).

الموارد	1,5 حصان	حصان	0,75 حصان	0,5 حصان	الحد الأقصى
عمالة بالدقيقة:					
الوصلات الكهربائية:	20	15	12	12	1440
تصنيع الصندوق:	55	50	50	40	2700
تركيب القش والتغليف:	10	8	6	6	480
الألواح المعدنية بالمتر:	6	4	3	2,5	350
القش بالكيلو:	1,5	1,25	1	1	75

فإذا علمت أن سعر البيع للمكيفات ١٢٠٠، ١٠٠٠، ٩٠٠، ٨٠٠ ريالٍ على التوالي، فما هي الصيغة الرياضية المناسبة لتعظيم حجم المبيعات؟

يمكن صياغة هذه المسألة كالتالي:

$$\text{Max } 1200X_1 + 1000X_2 + 900X_3 + 800X_4$$

S.T.

$20X_1 + 15X_2 + 12X_3 + 12X_4 \leq 1440$ قيد الوصلات الكهربائية

$55X_1 + 50X_2 + 50X_3 + 40X_4 \leq 2700$ قيد تصنيع الصندوق

$10X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 6X_4 \leq 480$ قيد تركيب القش والتغليف

$6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2.5X_4 \leq 350$ قيد الألواح المعدنية بالمتر

$1.5X_1 + 1.25X_2 + X_3 + X_4 \leq 75$ قيد القش بالكيلو

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

والحل الأمثل لهذه المسألة موجود في الشكل (١٤ , ٥) ، وفيه تكون قيمة دالة الهدف تساوي 58285.71 ريالاً، ويتم إنتاج 42.857143 وحدة من المنتج الأول (1.5 حصان) و8.571428 وحدة من المنتج الرابع (0.5 حصان)، وصفر من باقي المنتجات.

```
Max 1200X1 + 1000X2 + 900X3 + 800X4
S.T.
 20X1 + 15X2 + 12X3 + 12X4 <= 1440
 55X1 + 50X2 + 50X3 + 40X4 <= 2700
 10X1 + 8X2 + 6X3 + 6X4 <= 480
 6X1 + 4X2 + 3X3 + 2.5X4 <= 350
 1.5X1 + 1.25X2 + X3 + X4 <= 75
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)       58285.71
 VARIABLE          VALUE             REDUCED COST
     X1            42.857143            0.000000
     X2             0.000000           28.571428
     X3             0.000000           14.285714
     X4             8.571428            0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           480.000000            0.000000
      3)             0.000000           11.428572
      4)             0.000000           57.142857
      5)            71.428574            0.000000
      6)             2.142857            0.000000
 NO. ITERATIONS =       2
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABL
                COEF            INCREASE            DECREASE
    X1          1200.000000       16.666679            99.999992
    X2          1000.000000       28.571438             INFINITY
    X3           900.000000       14.285725             INFINITY
    X4           800.000000       72.727272            5.882356
                RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW        CURRENT          ALLOWABLE         ALLOWABLE
              RHS               INCREASE            DECREASE
     2         1440.000000        INFINITY           480.000000
     3         2700.000000       150.000000           59.999996
     4          480.000000        10.909091           75.000000
     5          350.000000        INFINITY            71.428574
     6           75.000000        INFINITY             2.142857
```

الشكل رقم (١٤ , ٥). يوضح مخرجات برنامج **LINDO** للمسألة رقم (٥ , ٥).

و الآن ماذا يحدث عند إضافة متغير جديد إلى المسألة:

لنفرض أن إدارة المصنع ترغب في إضافة منتج جديد عبارة عن مكيف صحراوي 0.5 حصان متنقل وبيعه بسعر 900 ريال للوحدة الواحدة. يستدعي هذا النوع من المنتجات استخدام نفس الموارد السابقة مع ثبات الحدود القصوى للموارد كما في الجدول، والذي يبين أيضاً تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من هذا المنتج.

الجدول رقم (٦ , ٥). يوضح الموارد المطلوبة للمنتج الجديد (مكيف صحراوي ٥ , ٠ حصان).

الموارد	0.5 حصان متنقل	الحد الأقصى	التكاليف
مواد جاهزة			340
عمالة بالدقيقة:			
الوصلات الكهربائية:	15	1440	7,5
تصنيع الصندوق:	50	2700	25
تركيب القش والتغليف:	6	480	3
الألواح المعدنية بالمتر:	3	350	60
القش بالكيلو:	1	72	15
إجمالي التكاليف للوحدة			450,5

يمكن حساب الأثر الناتج من إضافة هذا المتغير على الحل الأمثل بحساب قيمة Cj-Zj لهذا المتغير، والتي تمثل المنفعة المفقودة التي يمكن أن تحسن قيمة دالة الهدف. لكن هذه القيمة تعتمد على عنصرين Cj، والذي يمثل سعر البيع للوحدة من هذا المنتج وZj، والذي يمثل قيمة استهلاك هذا المتغير للموارد الحالية والممثلة بالسعر الثنائي حيث إن الأسعار الثنائية للقيود تمثل القيم الحالية المُستحقة (من وجهة نظر إدارة المصنع) للموارد المتاحة حالياً عند الحل الحالي. وحيث إن الجانب الأيمن ثابت في هذه الحالة، فإن المنتج الجديد سيضايق المنتجات الحالية في الموارد الموجودة في القيود النشطة (عمالة الوصلات الكهربائية وعمالة تصنيع الصندوق الخارجي)؛ وذلك لأنها مستهلكة بالكامل في الحل الحالي، وهذه القيود هي التي لديها قيم لا تساوي الصفر بالنسبة للسعر الثنائي. هنا سنقوم بحساب Zj (استهلاك المنتج الجديد للموارد الحالية المتاحة، والممثلة بالأسعار الثنائية)، وذلك كالتالي [Winston, 2004]:

- الأسعار الثنائية: مصفوفة صفية (1×m).
- معاملات المنتج الجديد في القيود: عبارة عن مصفوفة عمودية (m×1).

Max $1200X_1 + 1000X_2 + 900X_3 + 800X_4 + 900X_5$

S.T.

$20X_1 + 15X_2 + 12X_3 + 12X_4 + 15X_5 <= 1440$
$55X_1 + 50X_2 + 50X_3 + 40X_4 + 50X_5 <= 2700$
$10X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 <= 480$
$6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2.5X_4 + 3X_5 <= 350$
$1.5X_1 + 1.25X_2 + X_3 + X_4 + X_5 <= 75$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 58285.71

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	42.857143	0.000000
X_2	0.000000	28.571428
X_3	0.000000	14.285714
X_4	8.571428	0.000000
X_5	0.000000	14.285714

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	480.000000	0.000000
3)	0.000000	11.428572
4)	0.000000	57.142857
5)	71.428574	0.000000
6)	2.142857	0.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABL DECREASE
X_1	1200.000000	16.666679	99.999992
X_2	1000.000000	28.571438	INFINITY
X_3	900.000000	14.285725	INFINITY
X_4	800.000000	72.727272	5.882356
X_5	900.000000	14.285725	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1440.000000	INFINITY	480.000000
3	2700.000000	150.000000	59.999996
4	480.000000	10.909091	75.000000
5	350.000000	INFINITY	71.428574
6	75.000000	INFINITY	2.142857

الشكل رقم (١٥ , ٥). يوضح مخرجات برنامج LINDO للمسألة (٥ , ٥) بعد إضافة المنتج الجديد.

Z_5 = الأسعار الثنائية X معاملات المنتج الجديد في القيود

$$Z_5 = \begin{bmatrix} 0 & 11.428572 & 57.142857 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 914.2857$$

$$C_5 - Z_5 = 900 - 914.285742 = -14.285742$$

حيث إن قيمة Cj-Zj قيمة سالبة ونحن في حالة Max، فإن الحل الأمثل لن يتغير، ولن ننتج من المنتج الجديد، ولن يكون من المنطق الإنتاج من هذا المنتج إلا إذا كانت سعر بيع المنتج الجديد أكبر من أو يساوي 914,2857 ريالاً كما في الشكل رقم (١٥ , ٥).

الحالة الثانية: تحليل الحساسية عند تغير أكثر من عنصر في البرنامج الخطي (قاعدة ١٠٠٪):

كان حديثنا سابقاً عن أثر التغير لأحد عناصر البرنامج الخطي على الحل الأمثل مع ثبات باقي العناصر. والآن سنتحدث عن أثر التغير لأكثر من عنصر في البرنامج الخطي على الحل الأمثل الحالي والتي سنستخدم فيها قاعدة ١٠٠٪.

قاعدة ١٠٠٪: تنص هذه القاعدة على أن مجموع نسب التغير لمعاملات دالة الهدف أو مجموع نسب التغير للجانب الأيمن يجب ألا تزيد عن ١٠٠٪ حتى لا يتغير الحل الأمثل لكن قد تتغير قيم المتغيرات، وقيمة دالة الهدف [Winston, 2004]. أما إذا كان مجموع نسب التغير أكبر من ١٠٠٪ ، فإن هذه القاعدة لا تعطي أي دليل على تغير الحل الأمثل بمعنى أن الحل الأمثل قد يتغير وقد لا يتغير.

أولاً: أثر التغير لأكثر من معامل من معاملات دالة الهدف:

عندما يتغير أكثر من معامل من معاملات دالة الهدف فسنكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف التي تغيرت لها قيمة تكلفة مخفضة أكبر من الصفر (موجبة). في هذه الحالة نجد أن المتغيرات التي تغيرت هي متغيرات غير أساسية في الحل الأمثل الحالي؛ لأن التكلفة المخفضة لها موجبة وعلى هذا فسنكون أمام حالتين:

١- أن يكون التغير لهذه المعاملات ضمن المدى المسموح به، ولذلك فإن الحل الأمثل لا يتغير (تبقى القيود النشطة نشطة)، ولا تتغير قيم المتغيرات ولا تتغير قيمة دالة الهدف.

٢- أن يكون التغير لأحد هذه المعاملات على الأقل خارج المدى المسموح به، ولذلك فإن الحل الأمثل سيتغير، ولابد من إعادة حل المسألة من جديد.

الحالة الثانية: إذا كانت واحدة على الأقل من معاملات المتغيرات في دالة الهدف التي تغيرت لها قيمة تكلفة مخفضة تساوي الصفر. في هذه الحالة نجد أن لدينا على الأقل متغير أساسي قد تغيرت قيمة معامله في دالة الهدف، ومن ثم لابد من تطبيق قاعدة 100% . هنا نحتاج لتعريف الرموز التالية:

معاملات المتغيرات في دالة الهدف	الرمز
القيمة الأصلية لمعامل المتغير j	c_j
حجم التغير في المعامل j	Δc_j
الزيادة المسموح بها القصوى للمعامل j	I_j
النقصان المسموح به الأقصى للمعامل j	D_j

نعرّف rj على أنها نسبة التغير في معامل المتغير j. فإذا كانت:

$$\Delta c_j \geq 0, \quad ===\rightarrow r_j = \Delta c_j / I_j$$

و إذا كانت:

$$\Delta c_j \leq 0, \quad ===\rightarrow r_j = -\Delta c_j / D_j$$

و إذا كانت:

$$\Delta c_j = 0, \quad ===\rightarrow r_j = 0$$

حيث إن هذه النسبة تمثل نسبة التغير في معامل المتغير بالنسبة لأقصى مدى مسموح به، والذي يُبقي الحل الأمثل على حاله بدون تغيير. فإذا كان ($\sum r_j \leq 1$) ، فإن الحل الأمثل الحالي لن يتغير حيث تظل القيود النشطة نشطة، ولا تتغير قيم المتغيرات، ولكن تتغير قيمة دالة الهدف. لكن إذا كان مجموع نسب التغير أكبر من ١ ($\sum r_j \geq 1$)، فإن الحل الأمثل قد يتغير، وقد لا يتغير، حيث إن هذه القاعدة لا تعطينا أي دليل عن أثر التغير على الحل الأمثل.

ثانياً: أثر التغير لقيم الجانب الأيمن لأكثر من قيد:

عندما تتغير قيمة الجانب الأيمن لأكثر من قيد فسنكون كذلك أمام حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان التغير في قيمة الجانب الأيمن لقيود غير نشطة فقط، وعليه سنكون أمام حالتين:

١ – أن يكون التغير لقيم الجانب الأيمن ضمن المدى المسموح به، ولذلك فإن الحل الأمثل لا يتغير (تبقى القيود النشطة نشطة)، ولا تتغير قيم المتغيرات، ولا تتغير قيمة دالة الهدف.

٢– أن يكون التغير لإحدى قيم الجانب الأيمن على الأقل خارج المدى المسموح به، ولذلك فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير ولابد من إعادة حل المسألة من جديد.

الحالة الثانية: إذا كان واحدٌ على الأقل من القيود التي تغيرت قيمة جانبها الأيمن قيداً نشطاً. في هذه الحالة لابد من تطبيق قاعدة 100%، وسنحتاج هنا لتعريف الرموز التالية:

الرمز	الجانب الأيمن
b_i	القيمة الحالية للجانب الأيمن في القيد i
Δb_i	حجم التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيد i
I_i	الزيادة المسموح بها القصوى للجانب الأيمن في القيد i
D_i	النقصان المسموح به الأقصى للجانب الأيمن في القيد i

نعرّف r_i على أنها نسبة التغير في قيم الجانب الأيمن i، فإذا كانت:

$$\Delta b_i \geq 0, \quad ===\rightarrow \; r_i = \Delta b_i / I_i$$

و إذا كانت:

$$\Delta b_i \leq 0, \quad ===\rightarrow \; r_i = -\Delta b_i / D_i$$

و إذا كانت:

$$\Delta b_i = 0, \quad ===\rightarrow \; r_i = 0$$

حيث إن هذه النسبة تمثل نسبة التغير في قيمة الجانب الأيمن بالنسبة لأقصى مدى مسموح به، والذي يُبقي الحل الأمثل على حاله بدون تغيير. فإذا كان ($\sum r_i \leq 1$) فإن الحل الأمثل لن يتغير، ولكن تتغير قيم المتغيرات، وقيمة دالة الهدف. لكن إذا كان مجموع نسب التغير أكبر من 1 ($\sum r_i \geq 1$)، فإن الحل الأمثل (القيود النشطة) قد يتغير، وقد لا يتغير حيث إن هذه القاعدة لا تعطينا أي دليل عن أثر التغير على الحل الأمثل، لكن قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف ستتغيران في الغالب.

مثال توضيحي:

مسألة (٦ , ٥): في المسألة السابقة ٥-٥ ماذا يحدث للحل الأمثل إذا:

١- زاد معامل X_2 في دالة الهدف بمقدار ٢٠ ريالاً، وزاد معامل X_3 في دالة الهدف بمقدار ١٠ ريالات.

بما أن كلا المتغيرين متغيران غير أساسيين، وبما أن الزيادة في قيمة معاملهما كان أقل من الزيادة المسموح بها، فإن الحل الأمثل الحالي:

١- لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.

٢- قيم المتغيرات لا تتغير.

٣- قيمة دالة الهدف لا تتغير.

٢- زاد معامل X_2 في دالة الهدف بمقدار ٣٠ ريالاً، وزاد معامل X_3 في دالة الهدف بمقدار ١٠ ريالات.

بما أن كلا المتغيرين متغيران غير أساسيين، وبما أن الزيادة في قيمة معامل X_2 كانت أكبر من الزيادة المسموح بها، فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير، ولابد من إعادة حل المسألة.

٣- زاد معامل X_1 في دالة الهدف بمقدار ٨ ريالات، وزاد معامل X_3 في دالة الهدف بمقدار ١٠ ريالات.

حيث إن أحد المتغيرات متغير أساسي (X_1) فنحتاج هنا لتطبيق قاعدة ١٠٠٪.

$\Delta c_1 = 8$, $I_1 = 16.6666$, $r_1 = 0.48$

$\Delta c_3 = 10$, $I_3 = 14.2857$, $r_3 = 0.70$

$\sum r_j = 1.18 > 1$

بما أن $\sum r_j > 1$ فإن الحل الأمثل الحالي قد يتغير، وقد لا يتغير لكن قيمة دالة الهدف ستتغير.

٤- زاد معامل X_1 في دالة الهدف بمقدار ٥ ريالات ونقص معامل X_4 في دالة الهدف بمقدار ريالين.

بما أن كلا المتغيرين متغيران أساسيان، فنحتاج هنا لتطبيق قاعدة ١٠٠٪.

$\Delta c_1 = 5$, $I_1 = 16.6666$, $r_1 = 0.30$

$\Delta c_4 = 2$, $D_4 = 5.8823$, $r_3 = 0.34$

$\sum r_j = 0.64 < 1$

بما أن $\sum r_j < 1$، فإن الحل الأمثل الحالي:

١- لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.

٢- قيم المتغيرات لا تتغير.

٣- قيمة دالة الهدف سوف تتغير، وتصبح:

$$\text{New z-value} = 1205\ (42.857143) + 798\ (8.571428) = 58482.857$$

٥- زاد معامل X_1 في دالة الهدف بمقدار ١٥ ريالاً، وزاد معامل X_4 في دالة الهدف بمقدار ١٠ ريالات.

بما أن كلا المتغيرين متغيران أساسيان، فنحتاج هنا لتطبيق قاعدة ١٠٠٪.

$\Delta c_1 = 15$, $I_1 = 16.6666$, $r_1 = 0.90$

$\Delta c_4 = 10$, $I_4 = 72.7272$, $r_3 = 0.1375$

$\sum r_j = 1.0375 > 1$

بما أن $\sum r_j > 1$ فإن الحل الأمثل الحالي قد يتغير وقد لا يتغير لكن قيمة دالة الهدف ستتغير.

٦- نقص الجانب الأيمن للقيد الأول بمقدار ١٠٠ دقيقة، وزاد الجانب الأيمن للقيد الرابع بمقدار ٢٠ متراً.

بما أن القيد الأول والقيد الرابع قيدان غير نشطين والزيادة في كليهما ضمن المدى المسموح به، فإن الحل الأمثل الحالي:

١- لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.

٢- قيم المتغيرات لا تتغير.

٣- قيمة دالة الهدف لا تتغير.

٧- زاد الجانب الأيمن للقيد الرابع بمقدار ١٠٠ متر، وللقيد الخامس بمقدار ٢٠ كيلو، ونقص الجانب الأيمن للقيد الأول بمقدار ٥٠٠ دقيقة.

بما أن القيد الأول والرابع والخامس قيودٌ غير نشطة والتغير كان ضمن المدى المسموح به إلا للقيد الأول فالنقصان خارج المدى المسموح به، فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير، ولذلك لابد من إعادة حل المسألة لمعرفة أثر التغير على الحل الأمثل الحالي.

٨- زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار ١٠ دقائق وللقيد الثالث بمقدار ٥ دقائق.

بما أن القيد الثاني والقيد الثالث قيدان نشطان والزيادة (تغير موجب) في كليهما ضمن المدى المسموح به فلابد هنا من تطبيق قاعدة ١٠٠٪.

القيد	b_i	Δb_i	I_i	r_i
الثاني	2700	10	150	10/150
الثالث	480	5	10,909	5/10.909
المجموع				0.525

حيث إن $\sum r_i = 0.525$ وهي أصغر من 1 ، فإن الحل الأمثل الحالي:

١- لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.

٢- قيم المتغيرات سوف تتغير وبحل المعادلات جبرياً تكون قيمة $X_1 = 44.857$ و $X_4 = 6.0714$ ، أما باقي المتغيرات، فإن قيمها تبقى على حالها السابقة والتي تساوي صفراً؛ وذلك لأن التغير لم يؤثر على قيمة التكلفة المخفضة لهم.

٣- قيمة دالة الهدف سوف تتغير وتصبح $Z = 58685.71$.

٩- زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار ١٠ دقائق، وللقيد الرابع بمقدار ٥ أمتار.

بما أن القيد الثاني قيدٌ نشطٌ، والقيد الرابع قيدٌ غير نشط والزيادة (تغير موجب) في كليهما ضمن المدى المسموح به فلابد هنا من تطبيق قاعدة ١٠٠٪.

القيد	b_i	Δb_i	I_i	r_i
الثاني	2700	10	150	10/150
الرابع	350	5	∞	0
المجموع				0.0667

حيث إن $\sum r_i = 0.0667$ وهي أصغر من 1 ، فإن الحل الأمثل الحالي:

١- لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.

٢- قيم المتغيرات سوف تتغير وبحل المعادلات جبرياً للقيود النشطة فقط تكون قيم $X_1 = 42$ وقيمة $X_4 = 10$ ، أما باقي المتغيرات، فإن قيمها تبقى على حالها السابقة والتي تساوي صفراً؛ وذلك لأن التغير لم يؤثر على قيمة التكلفة المخفضة لهم.

٣- قيمة دالة الهدف سوف تتغير وتصبح $Z = 58400$.

١٠- زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار ٢٠ دقيقة، وللقيد الثالث بمقدار ١٠ دقائق.

بما أن القيد الثاني والقيد الثالث قيدان نشطان والزيادة (تغير موجب) في كليهما ضمن المدى المسموح به فلابد هنا من تطبيق قاعدة ١٠٠٪.

القيد	b_i	Δb_i	I_i	r_i
الثاني	2700	20	150	20/150
الثالث	480	10	10,909	10/10.909
المجموع				1.05

حيث إن $\sum r_i = 1.05$ وهي أكبر من 1، فإن الحل الأمثل الحالي قد يتغير، وقد لا يتغير حيث إن هذه القاعدة لا تعطينا أي معلومة عن أثر هذا التغير، ولكن قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف ستتغيران في الغالب، وهنا لابد من إعادة حل المسألة.

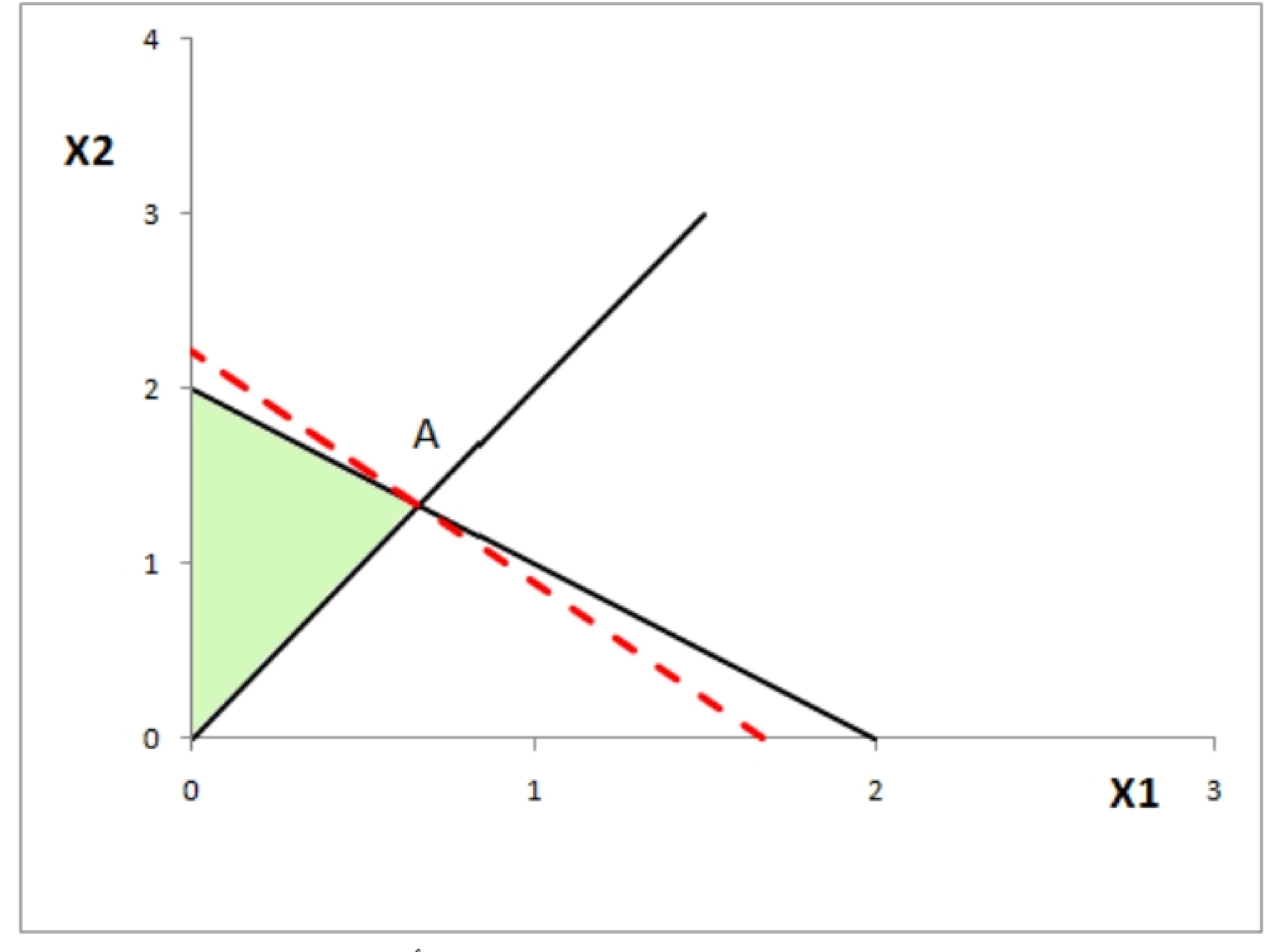
ملحق مواضيع إضافية في تحليل الحساسية

١-إيجاد الحدود الدنيا والقصوى لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف عندما تكون إشارة المعاملات مختلفة:

عندما تكون إشارة المعاملات مختلفة، فإننا سنواجه مشكلة في إيجاد الحد الأدنى أو الحد الأعلى للتغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف. سنستخدم المسألة (٦ , ٥) لتوضيح ذلك:

Max $z = 20X_1 + 15X_2$
Subject to:

$$3X_1 + 3X_2 \le 6$$
$$6X_1 - 3X_2 \le 0$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$



الشكل رقم (١٦ , ٥). يوضح الرسم البياني للمسألة (٦ , ٥).

نلاحظ أن قيم الحل الأمثل لهذه المسألة هي ($Z=100/3$, $X_1=2/3$, $X_2=4/3$)، وذلك عند النقطة A والتي تمثل تقاطع القيدين في الشكل (١٦ , ٥).

لتحديد المدى المسموح به فلابد أن نستخدم العلاقة بين معاملات المتغيرات في دالة الهدف ومعاملات المتغيرات في القيود النشطة (جميع القيود في المسألة ٥-٦) والموضحة في العلاقة التالية:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط } i}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط } i}$$

نلاحظ كذلك أن إشارة معاملات المتغيرات في القيد الثاني مختلفة، ولذلك لابد من الحذر هنا عند إيجاد الحدود العليا والدنيا. فلو أردنا معرفة الحد الأدنى لمعامل X_1 الذي يُبقي الحل الأمثل الحالي كما هو أي تبقى القيود النشطة كما هي، وقيم المتغيرات كما هي مع تغير قيمة دالة الهدف (Objective Value)، فيجب أن نتعامل مع القيد الأول؛ لأنه كلما انخفض معامل X_1 في دالة الهدف، فإن ميل دالة الهدف يكون أقرب إلى مساواة ميل القيد الأول، ولهذا فإن:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الأول}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الأول}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{15} = \frac{3}{3}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_1 في دالة الهدف = 15

و بنفس الطريقة يمكن أن تكون العلاقة بين معاملات دالة الهدف ومعاملات القيد النشط الثاني، لكن نلاحظ أن ميل القيد الثاني موجب أي كلما زادت X_1 ستزداد X_2 ، ولذلك سنوجد حداً أدنى آخر؛ وذلك لاختلاف إشارة معاملات المتغيرات في القيد الثاني.

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الثاني}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الثاني}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{15} = \frac{6}{-3}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_1 في دالة الهدف = 30-

وحيث إن 15 أقرب من 30- لقيمة معامل X_1 الحالية في دالة الهدف، فإن الحد الأدنى يساوي ١٥ . أما الحد الأعلى فيساوي مالا نهاية لعدم وجود قيمة أكبر من قيمة المعامل الحالي عند تعاملنا مع القيود النشطة.

أما بالنسبة لمعامل X_2 في دالة الهدف فإن الحد الأعلى:

$$\frac{20}{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{3}{3}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_2 في دالة الهدف = 20

و الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف يساوي:

$$\frac{20}{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{6}{-3}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف = 10-

المتغير Variable	القيمة الحالية Current Value	الحد الأقصى Upper Bound	الحد الأدنى Lower Bound	الزيادة المسموح بها Allowable Increase	النقصان المسموح به Allowable Decrease
X_1	20	∞	15	∞	5
X_2	15	20	-10	5	25

٢- مشكلة حالة التحلل وتحليل الحساسية:

مسألة رقم (٥,٧):

$$\text{Max } z = 10X_1 + 10X_2$$

Subject to

$$3X_2 \le 3$$
$$X_1 \le 1$$
$$6X_1 + 6X_2 \le 12$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل الأمثل لهذه المسألة ($Z = 20, X_1 = 1, X_2 = 1$)، وحيث إننا في حالة تحلل (Degenerate Case)؛ وذلك لأن عدد المتغيرات الأساسية الموجبة أقل من عدد القيود ($X_1, X_2 > 0, S_1 = S_2 = S_3 = 0$)، فإن نتائج تحليل الحساسية لا تكون ذات معنى فعال في حالة التحلل (Nondegenerate Case)، أو أنها لا تعطي نفس المعنى في حالة عدم التحلل [Gal T., 1986]. لاحظ الفرق في الحدود الدنيا والقصوى لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف، وقيم الجانب الأيمن والأسعار الثنائية للقيود في الجدول رقم (٥,٧) ، والجدول رقم (٥,٨) للمسألة رقم (٥,٧)، وقارنها مع نفس القيم في الجدول رقم (٥,٩) ، والجدول رقم (٥,١٠) للمسألة رقم (٥,٨) بعد إعادة ترتيب القيود. هذا الاختلاف ناتج من حدوث حالة التحلل، ولذلك نتائج تحليل الحساسية لا تعطي معنى فعالاً لمتخذ القرار، ويجب الحذر في التعامل مع هذه النتائج.

الجدول رقم (٥,٧). يوضح الحدود الدنيا والقصوى لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة (٥,٧).

المتغير	القيمة الحالية	الحد الأقصى	الحد الأدنى
المتغير الأول X_1	10	∞	0
المتغير الثاني X_2	10	∞	0

الجدول رقم (٥,٧). يوضح الحدود الدنيا والقصوى لقيم الجانب الأيمن والأسعار الثنائية للقيود للمسألة (٥,٧).

القيود	المكمل Si	السعر الثنائي DP	الحد الأقصى	الحد الأدنى
القيد الأول	0	3.33	3	0
القيد الثاني	0	10	1	0
القيد الثالث	0	0	∞	12

مسألة رقم (٥,٨). في هذه المسألة سنقوم فقط بتبديل ترتيب القيود للمسألة رقم (٥,٧)، فيكون الأول مكان الثالث والثالث مكان الأول.

$$\text{Max } z = 10X_1 + 15X_2$$
Subject to
$$6X_1 + 6X_2 \le 12$$
$$X_1 \le 1$$
$$3X_2 \le 3$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل الأمثل لهذه المسألة ($Z = 20, X_1 = 1, X_2 = 1$).

الجدول رقم (٩ , ٥). يوضح الحدود الدنيا والقصوى لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة (٨ , ٥).

المتغير	القيمة الحالية	الحد الأقصى	الحد الأدنى
المتغير الأول X_1	10	∞	10
المتغير الثاني X_2	10	10	0

الجدول رقم (١٠ , ٥). يوضح الحدود الدنيا والقصوى لقيم الجانب الأيمن والأسعار الثنائية للقيود للمسألة (٨ , ٥).

القيود	المكمل Si	السعر الثنائي DP	الحد الأقصى	الحد الأدنى
القيد الأول	0	1.6667	12	6
القيد الثاني	0	0	2	1
القيد الثالث	0	0	∞	3

النتائج السابقة تمت باستخدام برنامج DS for Windows 2، لكن الحال ستبقى كما باستخدام أي برنامج آخر مثل WinQSB أو LINDO ، ولذلك يستحسن عدم الاعتماد على هذه النتائج، وإعادة حل المسألة إذا كنا في حالة تحلل.

تمارين محلولة

السؤال الأول: من مخرجات برنامج LINDO (١ , ٥)، أجب على التالي، ولماذا؟

أ) املأ الفراغات في مخرجات برنامج LINDO.

ب) متى تكون W موجبة؟

تكون W موجبة إذا انخفضت قيمة معاملها في دالة الهدف بقيمة ٢٨,٧٥ ريالاً، أو أكثر أي أصبح ١,٢٥ أو أقل.

للتالي، ماذا يحدث للقيود النشطة وقيم المتغيرات ودالة الهدف مع تحديد القيم إن أمكن، ولماذا:

ج) ماذا يحدث لو نقص الجانب الأيمن للقيد الثالث (الصف الرابع) بوحدتين؟

بما أن النقصان ضمن النقصان المسموح، والقيد الثالث قيدُ غير نشط:

القيود النشطة: لا تتغير القيود النشطة (الحل الأمثل لا يتغير)

قيم المتغيرات: لا تتغير قيم المتغيرات

قيمة دالة الهدف: لا تتغير قيمة دالة الهدف

د) ماذا يحدث لو زاد الجانب الأيمن للقيد الرابع (الصف الخامس) بوحدتين؟

بما أن الزيادة ضمن المدى المسموح، والقيد الرابع قيدٌ نشط:

القيود النشطة: لا تتغير القيود النشطة (الحل الأمثل لا يتغير)

قيم المتغيرات: ستتغير قيم المتغيرات، وبما أن S وW يساوي كلُ منهما صفراً، ولن يتحولا إلى موجبين إلا بزيادة معاملهما في دالة الهدف بقيمة التكلفة المخفضة على الأقل، فستظل قيمتهما كما هي في الوقت الحالي. ويمكن إيجاد قيمة Y وX بحل القيدين النشيطين (حذف S وW) كالتالي:

$3X + 2Y = 6$ ==➔ بضرب المعادلة في -2 ==➔ $-6X - 4Y = -12$

$$2X + 4Y = 10$$
$$-4X = -2 \implies X = 0.5$$
$$3X + 2Y = 6 \implies 3(0.5) + 2Y = 6 \implies 2Y = 4.5 \implies Y = 2.25$$

قيمة دالة الهدف:

New z-value = 25(0.5) + 20(2.25) + 30(0) + 80(0) = 57.5

أو

New z-value = Old z-value - $\{(\Delta RHS_i \times \text{Dual Price}_i)\}$ = 55 - $\{(2 \times -1.25)\}$ = 57.5

هـ) ماذا يحدث لو زاد معامل Y في دالة الهدف وأصبح٣٥؟

بما أن الزيادة ضمن المدى المسموح والمتغير Y أساسي (موجب):

القيود النشطة: لا تتغير القيود النشطة (الحل الأمثل لا يتغير)

قيم المتغيرات: لا تتغير قيم المتغيرات

قيمة دالة الهدف: ستتغير وتصبح،

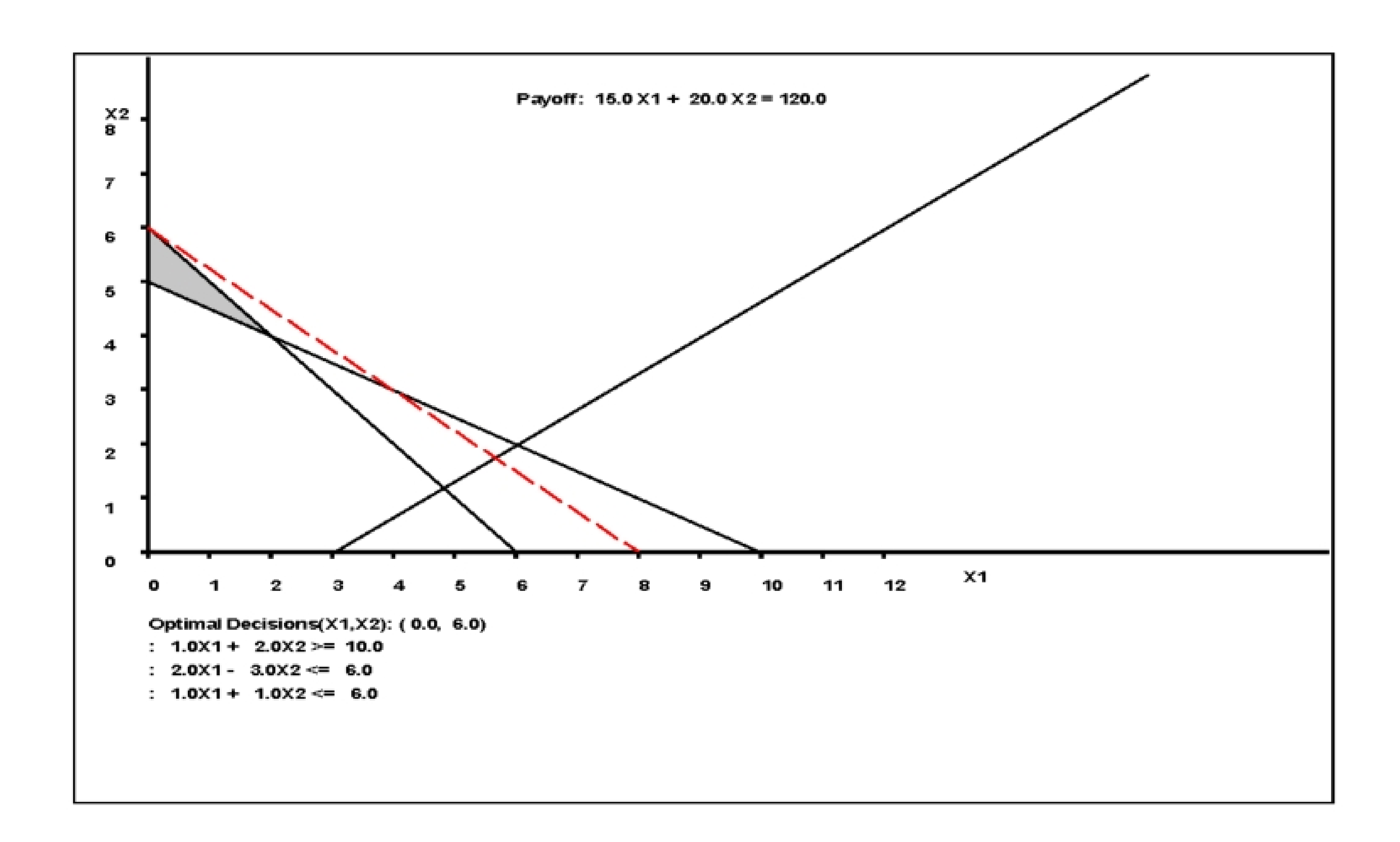
New z-value = 25(1) + 35(1.5) + 30(0) + 80(0) = 77.5

```
Min 25X + 20Y + 30W + 80S
Subject To
40X + 20Y + 15W + 50S >= 50
3X + 2Y = 6
2X + 2Y + 4W + 4S <= 8
2X + 4Y + W + 5S >= 8
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)  [    ]
 VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
      X           1.000000      [    ]
      Y           1.500000      [    ]
      W           0.000000      [    ]
      S      0.000000       73.750000
    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)               20.000000           0.000000
     3)                 0.000000          -7.500000
     4)                 3.000000           0.000000
     5)                 0.000000          -1.250000
 NO. ITERATIONS=       0
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                  OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE       CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF           INCREASE          DECREASE
     X           25.000000       5.000000          59.000000
     Y           20.000000      39.333332           3.333333
     W           30.000000       INFINITY          28.750000
     S           80.000000      [    ]            [    ]
                  RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  RHS            INCREASE          DECREASE
     2          50.000000     [    ]            [    ]
     3           6.000000       6.000000          1.333333
     4           8.000000       INFINITY          3.000000
     5           8.000000       4.000000          4.000000
```

مخرجات برنامج LINDO (١ , ٥) .

السؤال الثاني: للمسألة التالية والمرسومة (أسفل)، أوجد التالي:

$$\text{Max } z = 15X_1 + 20X_2$$
s.t.
$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$
$$2X_1 - 3X_2 \leq 6$$
$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



أ) أوجد الزيادة المسموح بها لمعامل X_1 في دالة الهدف؟

الزيادة المسموح بها لمعامل X1 في دالة الهدف = ٥

$$\frac{c1}{20} = \frac{1}{1} \Longrightarrow c1 = 20 \Longrightarrow AI = 20 - 15 = 5$$

ب) ما هو السعر الثنائي للقيود الثلاثة؟

القيد الأول والثاني قيدان غير نشيطان، ولذلك فالسعر الثنائي يساوي صفراً لكلٍ منهما.

القيد الثالث قيدٌ نشط، ولذلك لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثالث بوحدةٍ واحدة، فأصبح ٧ لصارت قيمة دالة الهدف الجديدة = (٧)٢٠+ (٠)١٥= ١٤٠، وحيث إن دالة الهدف القديمة تساوي ١٢٠، فإن السعر الثنائي هو الفرق بين القيمتين ويساوي ٢٠.

تماريـــــن

السؤال الأول: باستخدام مخرجات برنامج LINDO التالية، ماذا يحدث للحل الأمثل (القيود النشطة) والمتغيرات، ودالة الهدف؟ ولماذا للتالي من الأحداث:

أ) إذا زاد الجانب الأيمن للقيد الثالث بوحدتين.

ب) إذا انخفض الجانب الأيمن للقيد الثاني بخمس وحدات.

ج) إذا زاد الجانب الأيمن للقيد الأول بخمس وحدات.

د) متى تكون قيمة X_3 موجبة؟

```
Min X1 + 3X2 + 2X3
Subject to:
X1 + 4X2        >=8
2X1 +       X3 >=10
2X1 + 3X2      <=15

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      7.250000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1          5.000000           0.000000
      X2          0.750000           0.000000
      X3          0.000000           1.875000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           0.000000          -0.750000
      3)           0.000000          -0.125000
      4)           2.750000           0.000000

 NO. ITERATIONS=       2

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                       OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                      COEF           INCREASE            DECREASE
     X1            1.000000          3.750000             0.250000
     X2            3.000000          1.000000             3.000000
     X3            2.000000          INFINITY            1.875000

                       RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW        CURRENT       ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    RHS           INCREASE            DECREASE
       2         8.000000         3.666667            3.000000
       3        10.000000         4.400000           10.000000
       4        15.000000         INFINITY            2.750000
```

السؤال الثاني: للصيغة التالية والمرسومة في الأسفل:

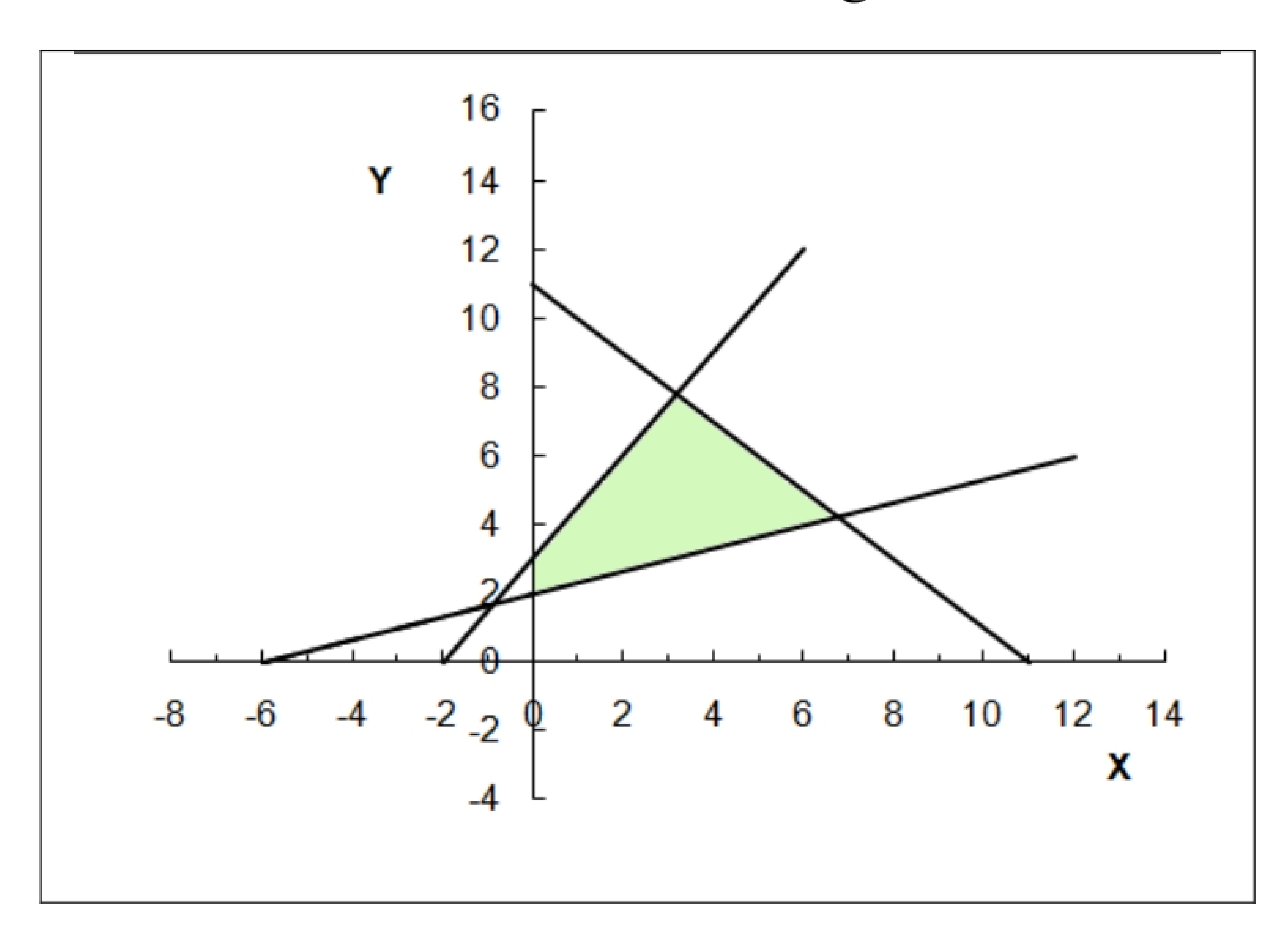
$$\text{Max } z = X + 2Y$$
Subject To:
$$-3X + 2Y \le 6$$
$$X + Y \le 11$$
$$-X + 3Y \ge 6$$
$$X, Y \ge 0$$

أ) أوجد الحل الأمثل.

ب) أوجد الزيادة المسموح بها لكل قيد، ولماذا؟

ج) إذا زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بوحدتين، ما هو الحل الأمثل، ولماذا؟

د) ما هو المدى المسموح به للمتغير X ؟



السؤال الثالث: للصيغة التالية:

$$\text{Min } w = 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3$$
S.T.
$$Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \ge 2$$
$$Y_1 - Y_2 - Y_3 = 1$$
$$Y_1\text{:unr}, Y_2 \le 0, Y_3 \ge 0$$

أ) أوجد المسألة الثنائية.

ب) أوجد الجدول الأول لحل هذه المسألة باستخدام السمبلكس.

السؤال الرابع: للبيانات الموجودة في مخرجات برنامج LINDO المرفق في الصفحة التالية، أجب عن التالي باختيار الإجابة المناسبة:

لو زاد معامل X_2 في دالة الهدف وأصبح 7 ، فإن قيمة دالة الهدف تصبح:

أ) تزيد ب) تنقص
ج)لا تتأثر ويكون لدينا حل بديل د) لا يحدث اثر

لو نقص الجانب الأيمن للقيد الثاني وأصبح صفراً، فإن قيمة X_2 تصبح:

أ) سالبة ب) صفراً
ج) ١٠ د) لا يمكن حسابها

لو زاد معامل X_1 في دالة الهدف وأصبح ١٠ فإن قيمة دالة الهدف تصبح:

أ) تتحسن ب) تسوء
ج)لا تتأثر د) المعلومات غير كاملة

لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار ٣ وحدات، فإن قيمة دالة الهدف تصبح:

أ) – ٧,٦٦٦٦ ب) – ٤٥,٦٦٦٦
ج) لا يمكن حسابها د) لا تتأثر

لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثالث بمقدار ١٠ وحدات، فإن قيمة X_4 تصبح:

أ)٤٠ ب) ٨٥,٩٩٩
ج) لا تتأثر د) غير ذلك

```
Min  6X1 + X2 + 3X3 -2X4
Subject to
 X1 +  X2               <= 42
 2X1 + 3X2 -  X3 -  X4  >= 10
 X1 +        2X3 +  X4 = 30
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     3
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)       – 46,66667
 VARIABLE       VALUE        REDUCED COST
     X1           0.000000        7.000000
     X2          13.333333        0.000000
     X3           0.000000        6.666667
     X4          30.000000        0.000000
    ROW   SLACK OR SURPLUS        DUAL PRICES
     2)            28,666666           0,000000
     3)            0,000000           -0,333333
     4)            0,000000            1.666667
 NO. ITERATIONS=      3
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

               OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE       CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
                COEF          INCREASE        DECREASE
   X1          6.000000       INFINITY        7.000000
   X2          1.000000       7.000000        1.000000
   X3          3.000000       INFINITY        6.666667
   X4         -2.000000       3.333333        INFINITY
               RIGHTHAND SIDE RANGES
  ROW          CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
                 RHS          INCREASE        DECREASE
   2     42,000000      INFINITY        28.666666
   3     10,000000      85,999992       39,999996
   4     30,000000      85,999992       30,000000
```

السؤال الخامس: باستخدام مخرجات برنامج LINDO في الصفحة التالية، أجب عن التالي مع إيجاد قيم المتغيرات الجديدة، وقيمة دالة الهدف فيما لو تغيرت:

١ – ما هي القيود النشطة والقيود غير النشطة؟

٢ – ماذا يحدث للحل الأمثل لو أن X_1 يكلف 30 ريالاً؟

٣ – ماذا يحدث للحل الأمثل لو أن X_2 تكلف ٣٥ ريالاً؟

٤ – ماذا يحدث للحل الأمثل لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني، وأصبح ٨ وحدات؟

٥ – ماذا يحدث للحل الأمثل لو زاد الجانب الأيمن للقيد الأول 100 وحدة؟

٦ – ما هو معامل X_4 في دالة الهدف الذي يجعلها موجبة؟

٧- متى تصبح القيود غير النشطة نشطة بدون تغيير معاملات دالة الهدف ولا الجانب الأيمن للقيود؟

```
MIN     50X1 + 20 X2 + 30 X3 + 80X4
 S.T.
       2)   400 X1 + 200 X2 + 150 X3 + 500 X4 >= 500
       3)      3 X1 +    2 X2                   >=    6
       4)      2 X1 +    2 X2 +    4 X3 +    4 X4 >=   10
       5)      2 X1 +    4 X2 +      X3 +    5 X4 >=    8

 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      90.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1           0.000000         27.500000
      X2           3.000000          0.000000
      X3           1.000000          0.000000
      X4           0.000000         50.000000


    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)         250.000000      0.000000
     3)           0.000000     -2.500000
     4)           0.000000         -7.500000
     5)           5.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       2

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                    OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    COEF           INCREASE          DECREASE
     X1           50.000000        INFINITY          27.500000
     X2           20.000000        18.333334          5.000000
     X3           30.000000        10.000000         30.000000
     X4           80.000000        INFINITY          50.000000

                    RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                 RHS           INCREASE          DECREASE
     2        500.000000      250.000000         INFINITY
     3          6.000000        4.000000        2.857143
     4         10.000000       INFINITY        4.000000
     5          8.000000        5.000000         INFINITY
```

٨- ماذا يحدث للحل الأمثل لو أن X_1 يكلف ٣٠ ريالاً، وأن X_2 تكلف ٣٥ ريالاً؟

٩- ماذا يحدث للحل الأمثل لو أن X_2 يكلف ٣٠ ريالاً، وأن X_3 تكلف ٣٥ ريالاً؟

١٠- ماذا يحدث للحل الأمثل لو أن X_2 يكلف ١٥ ريالاً، وأن X_3 تكلف ٣٥ ريالاً؟

١١- ماذا يحدث للحل الأمثل لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني، وأصبح ٨ وحدات، وزاد الجانب الأيمن للقيد الثالث، وأصبح ١٥ وحدة؟

١٢- ماذا يحدث للحل الأمثل لو نقص الجانب الأيمن للقيد الأول ١٠٠ وحدة، وزاد الجانب الأيمن للقيد الثالث، وأصبح ١٥ وحدة؟

١٣- ما هي العلاقة بين قيمة الجانب الأيمن للقيد الأول، وقيمة دالة الهدف؟

١٤- ما هي العلاقة بين قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني، وقيمة دالة الهدف؟

١٥- ما هو السعر العادل لموارد القيود الأربعة؟

المراجع
References

Gal T.: Shadow prices and sensitivity analysis in linear programming under degeneracy: state-of-the-art survey, OR Spektrum, Vol (8) Issue (2), 59–71, (1986) .

Gould F.J., Eppen G.D., and Schmidt C.P.: Introductory Management Science, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991 .

Render B., Stair R.M. Jr, and Hanna M.E.: Quantitative Analysis For Management, 8th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.

Taylor III, Bernard: Introduction to Management Science, 10/E ,Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2010.

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

الفصل السادس

الثنائيــــة
Duality

من بيانات أي برمجة خطية يمكن لنا استخدام نفس البيانات لعمل برنامج خطي آخر، وهذا البرنامج الخطي يسمى البرنامج الثنائي (Dual Problem) للبرنامج الأصلي (Primal Problem). والبرنامج الثنائي له منفعة حسابية واقتصادية ونظرية [Daellenbach et al, 1983]. لكن قبل الحديث عن المنفعة من البرنامج الخطي الثنائي لابد من معرفة كيفية تحويل أي صياغة للبرمجة الخطية إلى الصياغة الثنائية المقابلة لها.

لنفرض أن المسألة الأصلية (Primal Problem) كانت على الشكل التالي [Winston, 2004]:

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = cx\\&\text{s.t.}\\&\quad ax \le b\\&\quad x \ge 0\end{aligned}$$

حيث: c عبارة عن مصفوفة صفية (1×n) وتمثل معاملات دالة الهدف.

x عبارة عن مصفوفة عمودية (n×1) وتمثل متغيرات القرار.

a عبارة عن مصفوفة (m×n) وتمثل معاملات المتغيرات في القيود.

b عبارة عن مصفوفة عمودية (m×1) وتمثل قيم الجانب الأيمن للقيود.

ويمكن تمثيلها بالتالي:

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n\\&\text{s.t.}\\&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \le b_1\\&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \le b_2\\&\quad \ldots\ldots\\&\quad \ldots\ldots\\&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \le b_m\\&\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0\end{aligned}$$

و عند تحويلها إلى المسألة الثنائية (Dual Problem) فتصبح كالتالي:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } w = b'y \\
&\textbf{s.t.} \\
&\quad a'y \geq c' \\
&\quad y \geq 0
\end{aligned}$$

حيث: c' مصفوفة عمودية (n×1) مبدلة من c ، وتمثل قيم الجانب الأيمن للقيود الثنائية.

y عبارة عن مصفوفة عمودية (m×1)، وتمثل متغيرات الثنائية.

a' مصفوفة (n×m) مبدلة من a ، وتمثل معاملات المتغيرات في القيود الثنائية.

b' مصفوفة صفية (1×m) مبدلة من b ، وتمثل معاملات دالة الهدف الثنائية.

ويمكن تمثيلها بالتالي:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\
&\textbf{s.t.} \\
&\quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\
&\quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\
&\quad \ldots \\
&\quad \ldots \\
&\quad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n \\
&\quad y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0
\end{aligned}$$

كيف نحول صياغة البرمجة الخطية إلى الصياغة الثنائية المقابلة لها؟

لعمل هذا التحويل يجب الالتزام بالقواعد التالية [Daellenbach et al, 1983] و [Winston, 2004]:

- أولاً: إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية Max ، فإن دالة الهدف في المسألة الثنائية Min والعكس صحيح.
- ثانياً: عدد المتغيرات في المسألة الثنائية يساوي عدد القيود في المسألة الأصلية، وعدد القيود في المسألة الثنائية يساوي عدد المتغيرات في المسألة الأصلية.
- ثالثاً: معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الثنائية هي قيم الجانب الأيمن للمسألة الأصلية مرتبةً كما هي في المسألة الأصلية، وقيم الجانب الأيمن في المسألة الثنائية هي قيم معاملات دالة الهدف في المسألة الأصلية بدون الإخلال بالترتيب كذلك.
- رابعاً: معاملات القيد (j) لجميع المتغيرات في المسألة الثنائية هي نفس معاملات المتغير (j) لجميع القيود في المسألة الأصلية مع مراعاة الترتيب. (يلاحظ أننا استخدمنا الرمز (j)؛ لأن المتغيرات في المسألة الأصلية تأخذ هذا الرمز، وبالتالي القيود في المسألة الثنائية تأخذ نفس الرمز)

- خامساً: اتجاه القيد (j) في المسألة الثنائية يكون على شكل (=) إذا وإذا فقط كان المتغير (j) في المسألة الأصلية غير محدد الإشارة (URS)، والمتغير (i) في المسألة الثنائية يكون غير محدد الإشارة إذا وإذا فقط كان اتجاه القيد (i) في المسألة الأصلية على شكل (=).
- سادساً: بعد تطبيق الفقرة الخامسة، إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية Max فأعطِ باقي القيود في المسألة الثنائية اتجاهاً مماثلاً لاتجاهات المتغيرات في المسألة الأصلية، وأعطِ المتغيرات في المسالة الثنائية اتجاهاً مخالفاً لاتجاهات القيود في المسألة الأصلية.
- سابعاً: بعد تطبيق الفقرة الخامسة، إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية Min فأعطِ باقي القيود في المسألة الثنائية اتجاهاً مخالفاً لاتجاهات المتغيرات في المسألة الأصلية، وأعطِ المتغيرات في المسالة الثنائية اتجاهاً مماثلاً لاتجاهات القيود في المسألة الأصلية.

مثال على التحويل إلى المسألة الثنائية:

إذا كانت المسألة الأصلية كالتالي:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } z = 2X_1 + X_2 - X_3\\
&\textbf{s.t.}\\
&X_1 + X_2 - 2X_3 = 1\\
&X_1 - 2X_2 + 3X_3 \geq 8\\
&2X_2 + 2X_3 \leq 3\\
&2X_1 - 3X_3 \leq -6\\
&X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 : \text{URS}
\end{aligned}$$

لتحويل هذه المسألة إلى شكل المسألة الثنائية سنقوم بتطبيق القواعد السابقة كما يلي:

من الفقرة الأولى نحول دالة الهدف من Min إلى Max، وحيث إن عدد القيود في المسألة الأصلية أربعة، وعدد المتغيرات ثلاثة فيكون لدينا أربع متغيرات في المسألة الثنائية نسميها بأسماء مختلفة عن المتغيرات في المسألة الأصلية ولتكن (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)، وثلاثة قيود، وذلك كما هو موضح في الفقرة الثانية. هذا التغيير ممثل بالشكل التالي:

Max	Z	=	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4

الفقرة الثالثة تشير إلى أن معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسالة الثنائية، هي نفس قيم الجانب الأيمن للقيود في المسالة الأصلية، وفي الوقت نفسه تكون قيم الجانب اليمن للمسألة الثنائية

هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأصلية ويمكن تمثيل هذا التغيير كالتالي:

Max	Z	=		Y1	+	8	Y2	+	3	Y3	–	6	Y4			
				Y1			Y2			Y3			Y4			2
				Y1			Y2			Y3			Y4			1
				Y1			Y2			Y3			Y4		–	1

الفقرة الرابعة تهتم بتحديد معاملات المتغيرات في المسألة الثنائية، وحيث إن الصفوف في المسألة الثنائية هي الأعمدة في المسألة الأصلية فيمكن تطبيق ذلك بتحويل معاملات العمود الأول (المتغير X_1) للقيود في المسألة الأصلية إلى معاملات المتغيرات الثنائية في الصف الأول (القيد الأول)، وهكذا بالنسبة للعمود الثاني في المسألة الأصلية إلى الصف الثاني في المسألة الثنائية، ونستمر حتى ننتهي من جميع القيود في المسألة الثنائية. هذا التغيير موضح بالشكل التالي:

Max	Z	=		Y_1	+	8	Y_2	+	3	Y_3	–	6	Y_4			
				Y_1	+		Y_2			Y_3	+	2	Y_4			2
				Y_1	–	2	Y_2	+	2	Y_3			Y_4			1
			–	$2Y_1$	+	3	Y_2	+	2	Y_3	–	3	Y_4		–	1

الفقرة الخامسة تهتم بتحديد اتجاهات القيود والمتغيرات في المسألة الثنائية عندما تكون المتغيرات في المسألة الأصلية غير محددة الإشارة والقيود في المسألة الأصلية على شكل معادلات (=). ففي مثالنا هذا المتغير الثالث في المسألة الأصلية غير محدد الإشارة (Unrestricted in Sign)، وعليه فإن القيد الثالث للمسألة الثنائية يكون على شكل معادلة (الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن). كذلك فإن القيد الأول في المسألة الأصلية على شكل معادلة، مما يعني أن المتغير الأول للمسألة الثنائية (Y_1) يكون غير محدد الإشارة. الشكل التالي يمثل التغيرات التي حدثت حتى هذه المرحلة:

Max	Z	=		Y_1	+	8	Y_2	+	3	Y_3	–	6	Y_4			
				Y_1	+		Y_2			Y_3	+	2	Y_4			2
				Y_1	–	2	Y_2	+	2	Y_3			Y_4			1
			–	$2Y_1$	+	3	Y_2	+	2	Y_3	–	3	Y_4	=	–	1
				Y_1	:	URS	Y_2			Y_3			Y_4			

بعد تطبيق الفقرة الخامسة نكون أمام خيارين الفقرة السادسة أو السابعة، وذلك يعتمد على ما إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية Max أو Min. فإن كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية

Max نطبق الفقرة السادسة، أما إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية Min فنطبق الفقرة السابعة، وهو ما سنقوم به حيث إن دالة الهدف في المسالة الأصلية Min. من الفقرة السابعة يجب أن تأخذ القيود في المسألة الثنائية اتجاهاً مخالفاً لاتجاهات المتغيرات في المسالة الأصلية، فعلى سبيل المثال المتغير الأول في المسألة الأصلية ($X_1 \geq 0$)، مما يعني أن القيد الأول للمسالة الثنائية سيأخذ اتجاهاً مخالفاً (≤)، وهكذا بالنسبة لجميع القيود في المسألة الثنائية يجب أن تخالف اتجاهات المتغيرات في المسألة الأصلية. وفي الوقت نفسه فإن اتجاهات المتغيرات في المسألة الثنائية يجب أن تكون مماثلةً أو موافقةً لاتجاهات القيود في المسالة الأصلية، ويمكن تمثيل ذلك في المتغير الثاني للمسألة الثنائية Y_2 ، وحيث إن اتجاه القيد الثاني في المسألة الأصلية على شكل أكبر من (≥)،فإن اتجاه Y_2 في المسالة الثنائية سيكون على شكل أكبر من ($Y_2 \geq 0$)، ونستمر في تطبيق هذه القاعدة على بقية المتغيرات في المسألة الثنائية بجعلها مماثلة لاتجاهات القيود في المسألة الأصلية. التالي يمثل الشكل النهائي للمسألة الثنائية:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } w = Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 - 6Y_4 \\
&\textbf{s.t.} \\
&\quad Y_1 + Y_2 + 2Y_4 \leq 2 \\
&\quad Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 \geq 1 \\
&\quad -2Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 - 3Y_4 = -1 \\
&\quad Y_1 : \text{URS},\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \leq 0,\ Y_4 \leq 0
\end{aligned}$$

الجدول رقم (١ ,٦). يوضح المسألة الأصلية والمسألة الثنائية المقابلة لها.

Primal Problem المسألة الأصلية	Dual Problem المسالة الثنائية
$\text{Min } z = 2X_1 + X_2 - X_3$	$\text{Max } w = Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 - 6Y_4$
s.t.	s.t.
$X_1 + X_2 - 2X_3 = 1$	$Y_1 + Y_2 + 2Y_4 \leq 2$
$X_1 - 2X_2 + 3X_3 \geq 8$	$Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 \geq 1$
$2X_2 + 2X_3 \leq 3$	$-2Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 - 3Y_4 = -1$
$2X_1 - 3X_3 \leq -6$	$Y_1 : \text{URS},\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \leq 0,\ Y_4 \leq 0$
$X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 : \text{URS}$	

المنفعة الاقتصادية للصيغة الثنائية [Gould et al, 1991]:

لنفرض أن لدينا مصنع أثاث ينتج كراسي وطاولات فقط، الجدول التالي يبين الربح والحاجة للموارد للوحدة الواحدة:

	الكرسي	الطاولة	الحد الأقصى
الربح للوحدة	15	20	
الألواح الخشبية للوحدة	3	5	150
ساعات العمل للوحدة	4	5	180

الصيغة الرياضية لهذه المسألة هي:

تكبير الأرباح من بيع المنتجات $\text{Max } z = 15X_1 + 20X_2$

S.T.

قيد الألواح الخشبية $3X_1 + 5X_2 \leq 150$

قيد ساعات العمل $4X_1 + 5X_2 \leq 180$

$X_1 , X_2 \geq 0$

عند حل هذه المسألة، نجد أن الحل الأمثل هو $X_1=30, X_2=12, Z=690$ والآن إذا أردنا حل الصيغة الثنائية لهذه المسألة، فإن المتغير الأول لدينا Y_1 يمثل القيمة النقدية الحقيقية التي يستحقها اللوح الخشبي الواحد من وجهة نظر إدارة المصنع؛ وذلك لأن القيد الأول في المسألة الأصلية هو قيد الألواح الخشبية والمتغير الثاني Y_2 يمثل القيمة النقدية الحقيقية التي تستحقها ساعة العمل الواحدة من وجهة نظر إدارة المصنع؛ وذلك لأن القيد الثاني في المسألة الأصلية هو قيد ساعات العمل. فإذا أرادت الإدارة تخفيض تكلفة الموارد فستكون دالة الهدف كالتالي:

$$\text{Min } w = 150Y_1 + 180Y_2$$

و لكن تحقيق هذا الهدف يشترط ألا يقل ربح الكرسي الواحد عن 15 ريالاً، وللطاولة الواحدة عن 20 ريالاً، وعليه فستكون القيود بالشكل التالي:

$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 15$$
$$5Y_1 + 5Y_2 \geq 20$$

في ظل أن القيمة النقدية التي يستحقها اللوح الخشبي الواحد وساعة العمل الواحدة قيمة غبر سلبية.

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

إن هذه الصيغة هي الصيغة الثنائية للمسألة الأصلية كما يلي:

تصغير تكاليف الموارد

$$\text{Min } w = 150Y_1 + 180Y_2$$

S.T.

قيد الحد الأدنى من أرباح إنتاج الكراسي

$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 15$$

قيد الحد الأدنى من أرباح إنتاج الطاولات

$$5Y_1 + 5Y_2 \geq 20$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

الآن عند حل هذه المسألة، نجد أن الحل الأمثل هو $Y_1=1, Y_2=3, W=690$ ، وهذا يعني أن السعر الثنائي (سعر الظل) للوح الخشبي الواحد هو ريال واحد، والسعر الثنائي لساعة العمل الواحدة هو ٣ ريالات، وهذه الأسعار هي الأسعار الحقيقة التي تستحقها هذه الموارد بغض النظر عن السعر السوقي لها، مما يساعد الإدارة في اتخاذ القرارات الصحيحة والمناسبة فيما يخص مواردها.

ما هي الحالات الممكنة الحدوث عند حل أي مسألة ثنائية؟ [Winston, 2004]

هناك علاقة بين المسالة الأصلية والمسألة الثنائية عند الحل فقد يتبادر إلى الذهن أننا عند أي حالة من الحالات الثلاث (حل أمثل، حل غير محدد، المسألة غير ممكنة الحل)عند حل المسألة الأصلية سنواجه بثلاث حالات كذلك عند حل المسألة الثنائية تقابل كل حالة من حالات حل المسألة الأصلية، مما يعني أننا سنكون أمام تسع حالات لحل المسألة الثنائية. لكن هذا الأمر غير صحيح كما هو ممثل في الجدول التالي، حيث سيكون لدينا أربع حالات فقط:

الجدول رقم (٢ ,٦). الحالات الممكنة الحدوث عند حل أي مسألة ثنائية.

الأصلية	الثنائية
حل ممكن ←	حل ممكن
حل غير ممكن ←	حل غير ممكن
	حل غير محدد
حل غير محدد ←	حل غير ممكن

أما إذا كان الحل ممكناً لكن في حالة التحلل للمسألة الأصلية، فإن الحل في المسألة الثنائية يكون ممكناً، والحل متعدد. وإذا كان الحل ممكناً في المسألة الأصلية، ويوجد حل متعدد، فالحل ممكن في المسألة الثنائية، ولكن في ظل وجود حالة تحلل.

تماريـــــــــن

السؤال الأول: هات المسألة الثنائية لصياغة البرنامج الخطي التالي:

$\text{Min } w = 2X_1 + X_2 - X_3$

s.t.

$X_1 + X_2 - X_3 = 3$

$X_1 - X_2 + X_3 \geq 2$

$X_2 + X_3 \leq 3$

$X_1 \geq 0, X_2 \leq 0, X_3\text{: unr}$

السؤال الثاني: هات الصيغة الثنائية للبرنامج الخطي التالي:

$\text{Max } z = -2X_1 - X_2 + X_3 + 5X_4$

s.t.

$3X_1 + X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 3$

$4X_2 + X_3 - 3X_4 \geq 2$

$1.5X_1 + X_3 = 1$

$\geq 0\ X_{3\,:}\ \text{unr}\ X_4 \leq 0\ X_1, X_2,$

السؤال الثالث: هات الصيغة الثنائية للمسألة الأصلية التالية:

الصيغة الثنائية	الصيغة الأصلية
	Max 25X + 20Y + 30W + 80S S.T. $40X + 20Y + 15W + 50S \geq 50$ $3X + 2Y = 6$ $2X + 2Y + 4W + 4S \leq 8$ $2X + 4Y + W + 5S \geq 8$ $X \geq 0$, Y:unr ≥ 0, $W \leq 0$, $S \geq 0$

المراجـــع
References

Daellenbach H.G., George J.A., McNickle D.C.: Introduction To Operations Research Techniques, 2nd ed., Allyn and Bacon, Inc., Newton, MA, USA, 1983.

Gould F.J., Eppen G.D., and Schmidt C.P.: Introductory Management Science, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991 .

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

الفصل السابع

مسـألـة النـقـل
Transportation Problem

مســـــألة النقل من تطبيقـــات البرمجة الخطية، والتي ظهرت في العام ١٩٤١م عن طريق F. L. Hitchcock والتي يمكن تعريفها بالتالي [Ahmed et al, 2016]:

تهتم مسألة النقل نموذجًا من نماذج البرمجة الخطية بتخفيض التكاليف الخاصة بإمداد متطلبات لمواقع متعددة من مصادر متعددة، وهذه التكاليف تختلف باختلاف موقع المصدر، وموقع الطلب.

و تواجه الإدارة هذه المشكلة عندما تريد نقل منتجات معينة من مصادر (مثل المصانع) إلى مواقع الطلب (مثل نقاط التوزيع)، وعليه تحاول الإدارة تخفيض التكلفة الخاصة بنقل هذه المنتجات عن طريق تحديد التشكيلة المثلى أو الاختيار الأمثل لطرق النقل التي يمكن فيها تخفيض التكلفة مع الالتزام بقيود العرض والطلب. وتتكون مسألة النقل من التالي:

١ - مجموعة من مواقع الطلب عددها n ، والتي تنقل إليها المنتجات، فالموقع j يمكن أن ينقل إليه d_j وحدة على الأقل.

٢ -مجموعة من مواقع العرض عددها m ، والتي تنقل منها المنتجات، فالموقع i يمكن أن ينقل منه s_i وحدة على الأكثر.

٣ -تكلفة نقل الوحدة الواحـــدة من موقع العـــــرض i إلى موقع الطلب j ، والتي تمثل بالرمز c_{ij} .

٤ -عدد الوحدات المنقولة من موقع العرض i إلى موقع الطلب j ، والتي تمثل بالرمز x_{ij}.

وعليه، فإن الشكل العام للصيغة الرياضية لهذه المسألة ستكون كالتالي:

$$\text{Min } w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{ij} \ge 0$$

ولابد من ملاحظة أن مسائل النقل تحتوي على ثلاث حالات رئيسية، وهي [Winston, 2004]:

١-الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة.
٢-الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة.
٣-الكمية المعروضة أصغر من الكمية المطلوبة.

الحالة الأولى: الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة:

لنبدأ بالمثال التالي لتوضيح طبيعة مسائل النقل:

مسألة رقم (١ , ٧). إحدى شركات الألبان لديها ثلاث مزارع في كل من حرض، الخرج، وبريدة وتحرص الشركة على بيع منتجاتها في أربع نقاط توزيع، والتي تمثل أربع مناطق في المملكة. فإذا كانت تكلفة نقل كل طن من الألبان من كل مزرعة إلى كل نقطة توزيع بالريال السعودي، والكمية المطلوبة، والكمية المعروضة كما في الجدول رقم (١ , ٧):

الجدول رقم (١ , ٧). يوضح تكاليف النقل من كل مزرعة إلى كل منطقة توزيع.

الكمية المعروضة	أبها (4)	جدة (3)	الدمام (2)	الرياض (1)	إلى / من
40	180	150	110	110	حرض (1)
30	170	150	120	70	الخرج (2)
50	160	140	140	120	بريدة (3)
120	25	30	30	35	الكمية المطلوبة

لحل هذه المسألة، يمكن لنا تعريف المتغيرات وكتابة الصيغة الرياضية كالتالي:

X_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المزرعة i إلى نقطة التوزيع j (حيث i=1,2,3 وj=1,2,3,4)

$$\text{Min } w = 110X_{11} + 110X_{12} + 150X_{13} + 180X_{14} + 70X_{21} + 120X_{22} + 150X_{23} + 170X_{24} + 120X_{31} + 140X_{32} + 140X_{33} + 160X_{34}$$

Subject To

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 40$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 30$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 50$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 35$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 30$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 30$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 25$$
$$X_{ij} \geq 0 \text{ (for } i=1,2,3, \text{ and } j=1,2,3,4)$$

نلاحظ أننا استخدمنا (=) فقط بدلاً من أكبر من أو أصغر من؛ وذلك لأن هذه الحالة هي حالة التعادل، حيث إن الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة. الجدول رقم (٢ , ٧) يمثل حل هذه المسألة باستخدام برنامج LINDO:

الجدول رقم (٢ , ٧). يوضح مخرجات برنامج LINDO للمسألة رقم (١ , ٧).

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 14200,00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_{11}	5.000000	0.000000
X_{12}	30.000000	0.000000
X_{13}	5.000000	0.000000
X_{14}	0.000000	10.000000
X_{21}	30.000000	0.000000
X_{22}	0.000000	50.000000
X_{23}	0.000000	40.000000
X_{24}	0.000000	40.000000
X_{31}	0.000000	20.000000
X_{32}	0.000000	40.000000
X_{33}	25.000000	0.000000
X_{34}	25.000000	0.000000

لكن هناك طرق أخرى لحل هذه المسألة أسرع من طريقة السمبلكس باستخدام ما يُسمى بجداول النقل، وتنقسم هذه الطرق إلى نوعين:

١- طرق لإيجاد حل أولي ممكن.

٢- طرق لإيجاد الحل الأمثل إن وُجد.

طرق ايجاد الحل الأولي الممكن:

انظر [Winston, 2004] و[Gould et al, 1991] و[Daellenbach et al, 1983].

أولاً: طريقة الركن الشمالي الغربي (Northwest Corner Method):

تسعى هذه الطريقة لإيجاد حل أولي ممكن لمسألة النقل حتى يتمكن متخذ القرار من استخدام هذا الحل الأولي، وتطويره لإيجاد الحل الأمثل إن أمكن. تقوم هذه الطريقة على تحديد الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي، وهي خلية حرض/ الرياض، ومن ثم مقارنة الكمية المعروضة من حرض مع الكمية المطلوبة من الرياض واختيار القيمة الأقل لوضعها في الخلية، ثم طرح هذه القيمة من الكمية المعروضة من حرض والكمية المطلوبة من الرياض.

خطوات طريقة الركن الشمالي الغربي:

- املأ الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي $CELL_{ij}$ للجدول بأكبر كمية X_{ij} ممكنة (ابدأ بالخلية $CELL_{11}$) بحيث تستوفي الشرط التالي $X_{ij}=Max\{Min\ (s_i,d_j)\}$.
- أعد تقييم عمود المعروض وصف المطلوب كالتالي:

$$X_{ij}—New\ s_i = s_i$$

$$X_{ij}—New\ d_j = d_j$$

- إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف i، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود j من التقييم.
- إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف i والعمود j من التقييم.
- أعد تطبيق الخطوات السابقة بعد التعديل (الحذف)، وابدأ بالخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي للمصفوفة الجديدة بعد الحذف.

لتوضيح ذلك نقارن الكمية المعروضة من حرض، وهي ٤٠ طناً مع الكمية المطلوبة من الرياض، وهي ٣٥ طناً، وبما أن ٣٥ طناً أقل فنضع في خلية حرض/ الرياض ٣٥ طناً، ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة من حرض، وهي ٤٠ طناً فيبقى ٥ أطنان، وكذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة من الرياض، وهي ٣٥ طناً فلا يبقى شيء، الجدول رقم (٧,٣) والجدول (٧,٤) يبينان هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المطلوبة من الرياض أصبحت صفراً، وعليه فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا الرياض، ويتبقى لنا ٩ خلايا.

الجدول رقم (٣ , ٧). يوضح الجدول الأول قبل تعبئة الخلايا.

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
40	180	150	110	110	حرض
30	170	150	120	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	30	30	35	المطلوب

الجدول (٤ , ٧). يوضح الجدول الأول بعد تحديد الكمية في الخلية التي تقع شمال غرب.

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
5	180	150	110	110 35	حرض
30	170	150	120	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	30	30	0	المطلوب

الجدول رقم (٥ , ٧). يوضح الجدول الأول بعد تحديد الكمية في العمود الأول والصف الأول.

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
0	180	150	110 5	110 35	حرض
30	170	150	120	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	30	25	0	المطلوب

الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي هي خلية حرض/الدمام، وبمقارنة الكمية المعروضة (المتبقية) من حرض، وهي ٥ أطنان مع الكمية المطلوبة من الدمام، وهي ٣٠ طناً نجد أن الكمية المعروضة هي الأقل (٥ أطنان)، وعليه نخصص هذه الكمية للخلية حرض/ الدمام، ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة (المتبقية) من حرض، وهي ٥ أطنان فيبقى صفر، وكذلك

نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة من الدمام وهي ٣٠ طناً فيبقى ٢٥ طناً، الجدول رقم (٧, ٥) يبين هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المعروضة من حرض أصبحت صفراً، فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا حرض ويتبقى لنا ٦ خلايا.

والخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي هي خلية الخرج/الدمام وبمقارنة الكمية المعروضة من الخرج، وهي ٣٠ طناً مع الكمية المطلوبة (المتبقية) من الدمام، وهي ٢٥ طناً نجد أن الكمية المطلوبة هي الأقل (٢٥ طناً)، وعليه نخصص هذه الكمية للخلية الخرج/ الدمام، ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة من الخرج، وهي ٣٠ طناً فيبقى ٥ أطنان وكذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة (المتبقية) من الدمام، وهي ٢٥ طناً؛ فيبقى صفر، الجدول رقم (٧, ٦) يبين هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المطلوبة من الدمام أصبحت صفراً، وعليه فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا الدمام ويتبقى لنا ٤ خلايا.

الجدول رقم (٧, ٦). يوضح الجدول الأول بعد تحديد الكمية في العمود الثاني.

	الرياض	الدمام	جدة	أبها	المعروض
حرض	110 35	110 5	150	180	0
الخرج	70	120 25	150	170	5
بريدة	120	140	140	160	50
المطلوب	0	0	30	25	120

الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي هي خلية الخرج/ جدة، وبمقارنة الكمية المعروضة (المتبقية) من الخرج، وهي ٥ أطنان مع الكمية المطلوبة من جدة، وهي ٣٠ طناً نجد أن الكمية المعروضة (المتبقية) هي الأقل (٥ أطنان)، ولذلك نخصص هذه الكمية للخلية الخرج/ جدة، ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة (المتبقية) من الخرج، وهي ٥ أطنان فيبقى صفر، وكذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة من جدة، وهي ٣٠ طناً فيبقى ٢٥ طناً، الجدول رقم (٧, ٧) يبين هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المعروضة من الخرج أصبحت صفراً، فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا الخرج ويتبقى لنا خليتين.

الجدول رقم (٧ ,٧). يوضح الجدول الأول بعد تحديد الكمية في العمود الثاني والصف الثاني.

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
0	180	150	110 5	110 35	حرض
0	170	150 5	120 25	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	25	0	0	المطلوب

بقي لنا الآن خليتان يخصان ما هو معروض من بريدة ٥٠ طناً، وما هو مطلوب من جدة وأبها ٢٥ طناً لكل منهما. نخصص لجدة ما تحتاجه وهو ٢٥ طناً والباقي ٢٥ طناً لأبها، ولذلك يبقى صفر من الكمية المعروضة من بريدة ويبقى صفر لكل من الكمية المطلوبة من جدة وأبها. الجدول رقم (٧ ,٨) يمثل الحل الأولي الممكن لهذه المسألة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي. يمكن حساب قيمة التكلفة الكلية (ت. ك) لعملية النقل هذه كالتالي:

ت.ك=[(٣٥×١١٠)+(٥×١١٠)+(٢٥×١٢٠)+(٥×١٥٠)+(٢٥×١٤٠)+(٢٥×١٦٠)]=
١٥٦٥٠ ريالاً

الجدول رقم (٧ ,٨). يوضح الجدول الأول للمسألة رقم (٧ ,١) والتي تمثل الحل الأولي الممكن.

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
40	180	150	110 5	110 35	حرض(1)
30	170	150 5	120 25	70	الخرج(2)
50	160 25	140 25	140	120	بريدة(3)
120	25	30	30	35	المطلوب

ثانياً: طريقة أقل التكاليف (Minimum Cost Method):

تقوم هذه الطريقة على مبدأ أن التكاليف هي العنصر المهم في المسألة، ولهذا تهدف إلى إيجاد حل أولي ممكن عبر تخفيض تكلفة النقل على أمل أن يساهم هذا المبدأ في تقليل عدد الجداول اللازمة للوصول للحل الأمثل إن وُجد. تبدأ هذه الطريقة كالتالي:

خطوات طريقة أقل التكاليف:

- حدد الخلية $CELL_{ij}$ ذات التكلفة الأقل في الجدول. (عند التعادل اختر عشوائياً)
- املأ الخلية $CELL_{ij}$ المختارة بأكبر كمية X_{ij} ممكنة بحيث تستوفي الشرط التالي:

$$X_{ij}=Max\{Min\ (s_i,d_j)\}.$$

- أعد تقييم عمود المعروض وصف المطلوب كالتالي:

$$X_{ij}—New\ s_i = s_i$$

$$X_{ij}—New\ d_j = d_j$$

- إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف i من التقييم، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود j من التقييم.
- إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف i والعمود j من التقييم.
- أعد تطبيق الخطوات السابقة بعد التعديل على ما تبقى من خلايا مرة أخرى حتى يتم حذف جميع الصفوف والأعمدة.

لإيضاح ذلك يمكن لنا استخدام المسألة السابقة في الجدول رقم (٧,٣). نلاحظ أن تكلفة النقل في الخلية $CELL_{21}$ هي الأقل (٧٠ ريالاً) من بين كل الخلايا، ومن ثم نملأ هذه الخلية بالكمية ٣٠ طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من الخرج، والكمية المطلوبة من الرياض، ونحذف الصف الثاني (الخرج) من التقييم الجديد حيث إن الكمية المعروضة له أصبحت صفراً والكمية المطلوبة للرياض أصبحت ٥ أطنان، كما هو موضح في الجدول رقم (٧,٩).

أقل تكلفة نقل للخلايا الأخرى هي ١١٠ وذلك في الخلية $CELL_{11}$ والخلية $CELL_{12}$، حيث إن التكلفة متساوية في الخليتين. نختار الخلية $CELL_{11}$ (عشوائياً)، ونملأها بالكمية ٥ أطنان حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من حرض والكمية المتبقية المطلوبة من الرياض، ونحذف العمود الأول (الرياض) من التقييم الجديد، حيث إن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً، والكمية المعروضة لحرض أصبحت ٣٥ طناً، كما هو موضح في الجدول رقم (٧,١٠).

ثانياً: طريقة أقل التكاليف (Minimum Cost Method):

تقوم هذه الطريقة على مبدأ أن التكاليف هي العنصر المهم في المسألة، ولهذا تهدف إلى إيجاد حل أولي ممكن عبر تخفيض تكلفة النقل على أمل أن يساهم هذا المبدأ في تقليل عدد الجداول اللازمة للوصول للحل الأمثل إن وُجد. تبدأ هذه الطريقة كالتالي:

خطوات طريقة أقل التكاليف:

- حدد الخلية $CELL_{ij}$ ذات التكلفة الأقل في الجدول. (عند التعادل اختر عشوائياً)
- املأ الخلية $CELL_{ij}$ المختارة بأكبر كمية X_{ij} ممكنة بحيث تستوفي الشرط التالي:

$$X_{ij}=Max\{Min\ (s_i,d_j)\}.$$

- أعد تقييم عمود المعروض وصف المطلوب كالتالي:

$$X_{ij}—New\ s_i = s_i$$

$$X_{ij}—New\ d_j = d_j$$

- إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف i من التقييم، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود j من التقييم.
- إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف i والعمود j من التقييم.
- أعد تطبيق الخطوات السابقة بعد التعديل على ما تبقى من خلايا مرة أخرى حتى يتم حذف جميع الصفوف والأعمدة.

لإيضاح ذلك يمكن لنا استخدام المسألة السابقة في الجدول رقم (٧,٣). نلاحظ أن تكلفة النقل في الخلية $CELL_{21}$ هي الأقل (٧٠ ريالاً) من بين كل الخلايا، ومن ثم نملأ هذه الخلية بالكمية ٣٠ طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من الخرج، والكمية المطلوبة من الرياض، ونحذف الصف الثاني (الخرج) من التقييم الجديد حيث إن الكمية المعروضة له أصبحت صفراً والكمية المطلوبة للرياض أصبحت ٥ أطنان، كما هو موضح في الجدول رقم (٧,٩).

أقل تكلفة نقل للخلايا الأخرى هي ١١٠ وذلك في الخلية $CELL_{11}$ والخلية $CELL_{12}$، حيث إن التكلفة متساوية في الخليتين. نختار الخلية $CELL_{11}$ (عشوائياً)، ونملأها بالكمية ٥ أطنان حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من حرض والكمية المتبقية المطلوبة من الرياض، ونحذف العمود الأول (الرياض) من التقييم الجديد، حيث إن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً، والكمية المعروضة لحرض أصبحت ٣٥ طناً، كما هو موضح في الجدول رقم (٧,١٠).

الجدول رقم (٩ , ٧). يوضح وضع أكبر كمية ممكنة في الخلية رقم ٢١ وبالتالي يحذف الصف الثاني للاكتفاء.

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
40	180	150	110	110	حرض(1)
0	170	150	120	70 30	الخرج(2)
50	160	140	140	120	بريدة(3)
120	25	30	30	5	المطلوب

الجدول رقم (١٠ , ٧). يوضح وضع أكبر كمية ممكنة في الخلية رقم ١١ ولذلك يحذف العمود الأول للاكتفاء.

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
35	180	150	110	110	حرض(1)
0	170	150	120	70 30	الخرج(2)
50	160	140	140	120	بريدة(3)
120	25	30	30		30

أقل تكلفة نقل للخلايا المتبقية الأخرى هي ١١٠، وذلك في الخلية $CELL_{12}$. نملأ الخلية $CELL_{12}$ بالكمية ٣٠ طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المتبقية المعروضة من حرض والكمية المطلوبة من الدمام، ونحذف العمود الثاني (الدمام) من التقييم الجديد، حيث إن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً والكمية المعروضة لحرض أصبحت ٥ أطنان، كما هو موضح في الجدول رقم (١١ , ٧).

أقل تكلفة نقل للخلايا المتبقية الأخرى هي ١٤٠، وذلك في الخلية $CELL_{33}$. نملأ الخلية $CELL_{33}$ بالكمية ٣٠ طناً، حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من بريدة، والكمية المطلوبة من جدة، ونحذف العمود الثالث (جدة) من التقييم الجديد، حيث إن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً والكمية المعروضة لبريدة أصبحت ٢٠ طناً، كما هو موضح في الجدول رقم (١٢ , ٧).

الجدول رقم (١١ , ٧). يوضح وضع أكبر كمية ممكنة في الخلية ١٢ وبالتالي يحذف العمود الثاني للاكتفاء.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150	180	5
الخرج(2)	70 30	120	150	170	0
بريدة(3)	120	140	140	160	50
المطلوب	0	0	30	25	120

الجدول رقم (١٢ , ٧). يوضح وضع أكبر كمية ممكنة في الخلية ٣٣ وبالتالي يحذف العمود الثالث للاكتفاء.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150	180	5
الخرج(2)	70 30	120	150	170	0
بريدة(3)	120	140	140 30	160	20
المطلوب	0	0	0	25	120

لم يبق إلا خليتين والخلية الأقل تكلفة هي الخلية $CELL_{34}$ بتكلفة نقل تساوي ١٦٠ ريالاً للطن. نملأ هذه الخلية $CELL_{34}$ بالكمية ٢٠ طناً، حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المتبقية المعروضة من بريدة والكمية المطلوبة من أبها، ونحذف الصف الثالث (بريدة) من التقييم الجديد، حيث إن الكمية المعروضة منه أصبحت صفراً، والكمية المطلوبة لأبها أصبحت ٥ أطنان. أخيراً بقي خلية واحدة نملؤها بالكمية المتبقية ٥ أطنان مطلوبة لأبها ومعروضة من حرض. الجدول النهائي لإيجاد الحل الأولي الممكن باستخدام طريقة أقل التكاليف موضح في الجدول رقم (١٣ , ٧).

الجدول رقم (١٣ ,٧). يوضح وضع أكبر كمية ممكنة في الخلية رقم ٣٤ وماتبقى في الخلية رقم ١٤.

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(3)	الرياض(1)	
40	180 5	150	110 30	110 5	حرض(1)
30	170	150	120	70 30	الخرج(2)
50	160 20	140 30	140	120	بريدة (3)
120	25	30	30	35	المطلوب

ت.ك=[(١١٠×٥)+(١١٠×٣٠)+(١٨٠×٥)+(٧٠×٣٠)+(١٤٠×٣٠)+(١٦٠×٢٠)]= ١٤٢٥٠ ريالاً

ثالثاً: طريقة فوجل التقريبية (Vogel Approximation Method):

تقوم هذه الطريقة على أساس الأخذ في الاعتبار تكلفة الندم (Regret Cost) لكل صف، ولكل عمود حتى لا نتكبد تكاليف ناتجة عن سوء أو خطأ في الاختيار.

خطوات طريقة فوجل التقريبية:

- في كل صف احسب تكلفة الندم على أساس الفرق في التكلفة بين الخليتين صاحبتي التكلفة الأقل في الصف. وفي كل عمود، احسب تكلفة الندم على أساس الفرق في التكلفة بين الخليتين صاحبتي التكلفة الأقل في العمود.
- اختر أعلى تكلفة ندم من كل الصفوف والأعمدة. (عند التعادل اختر عشوائياً)
- في الصف أو العمود المختار، املأ الخلية $CELL_{ij}$ ذات تكلفة النقل الأقل بأكبر كمية X_{ij} ممكنة بحيث تستوفي الشرط التالي:

$$X_{ij}=Max\{Min\ (s_i,d_j)\}$$

- أعد تقييم عمود المطلوب وصف المعروض كالتالي:

$$X_{ij}-New\ s_i = s_i$$

$$X_{ij}-New\ d_j = d_j$$

- إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف i من التقييم، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود j من التقييم.
- إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف i والعمود j من التقييم.
- أعد تطبيق الخطوات السابقة على ما تبقى من خلايا مرةً أخرى حتى يتم حذف جميع الصفوف والأعمدة مع مراعاة القيم الجديدة لتكلفة الندم.

في مسألتنا السابقة رقم (١ ,٧)، وفي جدول رقم (٣ ,٧)، لو نظرنا إلى الصف الثاني مثلاً والخاص بمزرعة الخرج، فإن أقل تكلفة نقل للطن الواحد من الخرج سيكون للرياض بتكلفة تساوي ٧٠ ريالاً للطن، ولكن لو اخترنا ثاني أقل تكلفة نقل للطن من الخرج فستكون للدمام بتكلفة نقل تساوي ١٢٠ ريالاً، وهنا ستتكلف ٥٠ ريالاً إضافية ناتجة من سوء اختيار المسار المناسب للنقل، وذلك باختيارنا النقل من الخرج إلى الدمام بدلاً من الرياض، وعليه فإن اختيار أي مسار لنقل الألبان من الخرج غير الرياض سيكلف ٥٠ ريالاً إضافية للطن الواحد على الأقل، وتعرف هذه التكلفة بتكلفة الندم أو العقوبة لعدم استخدام أفضل طريق نقل لمزرعة الخرج. (يمكن العودة للمراجع أعلاه للنظر في هذه الطريقة).

لكن السؤال الذي نحتاج للإجابة عليه هل هذا الحل الأولي (بأي طريقة) هو الحل الأمثل؟ للتأكد من ذلك لابد من استخدام إحدى الطرق التالية:

طرق لإيجاد الحل الأمثل:

انظر [Winston, 2004] و [Gould et al, 1991] و[Daellenbach et al, 1983].

أولاً: طريقة الحجر المتدحرج (Stepping Stone Method) :

تقوم هذه الطريقة على تقييم الخلايا الفارغة لتحديد ما إذا كان من المصلحة تحويلها إلى خلية مستخدمة، وهذه العملية تشبه عملية تحديد المتغير الداخل في طريقة السمبلكس عن طريق تقييم قيم C_j-Z_j للمتغيرات غير الأساسية. في مثالنا هذا لدينا ١٢ متغيراً بعضها قيمته أكبر من الصفر، وهي المتغيرات الأساسية في هذه المرحلة من الحل (كما في جداول السمبلكس)، وبعضها يساوي الصفر، وهي المتغيرات غير الأساسية، والتي نريد أن نعرف هل من المصلحة تحويل أيٍ منها إلى متغير أساسي.

المتغيرات ($X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{24}, X_{31}, X_{32}$) كلها متغيرات غير أساسية، وتساوي الصفر حيث تمثل الكمية المنقولة مثلاً من حرض إلى جدة (X_{13} والتي تساوي الصفر حيث لم يتم نقل أي وحدة

من حرض إلى جدة في هذه المرحلة من الحل). ولابد لنا من معرفة المنفعة على التكلفة الكلية لو حولنا أحد هذه المتغيرات إلى متغير أساسي. لعمل ذلك نقوم بتقييم الخلايا غير المستخدمة، وذلك بنقل وحدة واحدة إلى إحدى هذه الخلايا، ودراسة الأثر الناتج عن عملية النقل الجديدة هذه على التكلفة الكلية الحالية، ومن ثم الانتقال إلى خلية أخرى لدراسة نفس الأثر، وهكذا من خلية إلى أخرى حتى ننتهي من جميع الخلايا غير المستخدمة. إذا كان هناك منفعة تُحسِّن من قيمة التكلفة الكلية نختار الخلية التي تعطي هذه المنفعة، ونحولها إلى خلية مستخدمة. تعتمد طريقة التقييم هذه على ما يُسمى بالحلقة المغلقة (Closed Loop)، والتي تمثل بشكل مضلع مغلق.

خطوات طريقة الحجر المتدحرج باستخدام أسلوب مسار الحلقة المغلقة:

- ابدأ بخلية غير مستخدمة، وانقل إليها وحدة واحدة (إشارة +)، مما سيؤدي إلى زيادة الكمية المعروضة، والكمية المطلوبة في صف وعمود الخلية .
- لعمل التوازن لابد من حذف وحدة واحدة (إشارة –) من نفس الصف لخلية مستخدمة، وحذف وحدة واحدة من نفس العمود لخلية مستخدمة أخرى أيضاً.
- تستمر عملية الاضافة (إشارة +) والحذف (إشارة –) في خلايا مستخدمة حتى نحصل على مسار لمضلع مغلق ينتهي بالخلية غير المستخدمة التي بدأنا منها.
- اجمع التكاليف في الخلايا التي أضفنا لها (إشارة +)، واطرحها من التكاليف في الخلايا التي حذفنا (إشارة –) منها.
- النتيجة تمثل التكلفة الحدية Marginal Cost، وهي تعكس المنفعة Utility، أو (عدم المنفعة) على التكلفة الكلية جراء نقل وحدة واحدة ويرمز لها بالرمز $\bar{U}$. (هذه القيمة تشبه قيمة C_j-Z_j في جداول السمبلكس)
- طبق نفس الطريقة على جميع الخلايا غير المستخدمة، وقارن بين منفعة النقل ($\bar{U}$) لجميع الخلايا غير المستخدمة.
- اختر الخلية غير المستخدمة التي تعطي أصغر قيمة سالبة للمنفعة ($\bar{U}$)، ونفذ عليها عملية النقل، وذلك بنقل أصغر كمية موجودة في الخلايا ذات الاشارة السالبة إلى الخلايا ذات الاشارة الموجبة. (في حالة تعظيم إيرادات النقل اختر الخلية غير المستخدمة التي تعطي أكبر قيمة موجبة للمنفعة ($\bar{U}$))

شروط الحلقة المغلقة:

- مجموع عدد الخلايا عدد زوجي منها الخلية الأولى فقط غير مستخدمة.
- عدد الإشارات الموجبة يساوي عدد الإشارات السالبة، ولا يزيد عن إشارة واحدة في كل صف وعمود.
- الخلية الأولى غير المستخدمة تكون إشارتها موجبة.
- عدد الأضلاع لا يقل عن أربعة أضلاع.

للمسألة رقم (١ , ٧) سنقوم بتقييم الخلايا غير المستخدمة بناءً على ما ذكرناه سابقاً:

بافتراض أننا بدأنا بالحل الأولي من طريقة الركن الشمالي الغربي جدول رقم (٨ , ٧)، فإن كمية X_{13} للخلية (حرض / جدة) تساوي الصفر، حيث إنها خلية غير مستخدمة، وباستخدام أسلوب الحلقة المغلقة يمكن لنا عمل شكل مضلع، كما هو موضح في الجدول رقم (١٤ , ٧)، وذلك بوضع إشارة موجب (+) للخلية $CELL_{13}$ والخلية $CELL_{22}$، وإشارة سالب (−) للخلية $CELL_{12}$ والخلية $CELL_{23}$، ومن ثم حساب قيم $\bar{U}_{13}$ كما يلي:

$$\bar{U}_{13} = 150 + 120 - 110 - 150 = +10$$

الجدول رقم (١٤ , ٧). يوضح تقييم الخلية رقم ١٣ والتي تمثل المنفعة من استخدام هذه الخلية.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 35	110 − 5	150 +	180	40
الخرج(2)	70	120 + 25	150 − 5	170	30
بريدة(3)	120	140	140 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

بالنسبة للخلية غير المستخدمة $CELL_{14}$، يمكن لنا عمل شكل مضلع باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة كما هو موضح في الجدول التالي (١٥ , ٧)، وذلك بوضع إشارة موجب (+) للخلية $CELL_{14}$، والخلية $CELL_{33}$، والخلية $CELL_{22}$، وإشارة سالب (−) للخلية $CELL_{34}$، والخلية $CELL_{23}$، والخلية $CELL_{12}$ ، ومن ثم حساب قيم $\bar{U}_{14}$ كما يلي:

$$\bar{U}_{14} = 180 + 140 + 120 - 160 - 150 - 110 = +20$$

الجدول رقم (١٥ , ٧). يوضح تقييم الخلية رقم ١٤ والتي تمثل المنفعة من استخدام هذه الخلية.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 / 35	110 / – 5	150	180 / +	40
الخرج(2)	70	120 / + 25	150 / – 5	170	30
بريدة(3)	120	140	140 / + 25	160 / – 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

وهكذا بالنسبة لجميع الخلايا غير المستخدمة الأخرى. التالي يوضح النتائج النهائية لعملية التقييم:

$\bar{U}_{13} = 110 + 150 - 120 - 150 = +10$
$\bar{U}_{14} = 180 + 140 + 120 - 160 - 150 - 110 = +20$
$\bar{U}_{21} = 70 + 110 - 110 - 120 = -50$
$\bar{U}_{24} = 170 + 140 - 160 - 150 = 0$
$\bar{U}_{31} = 120 + 110 + 150 - 110 - 120 - 140 = +10$
$\bar{U}_{32} = 140 + 150 - 120 - 140 = +30$

نتائج عملية التقييم للخلايا غير المستخدمة

أولاً: إذا كانت مسألة النقل Min (مسألة تخفيض تكاليف):

- إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة Ū سالبة لخلية واحدة على الأقل، اختر الخلية التي لديها أصغر قيمة سالبة، ونفذ عليها عملية النقل.
- إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة Ū موجبة لكل الخلايا غير المستخدمة، قف فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.
- إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة Ū موجبة لكل الخلايا غير المستخدمة إلا لخلية واحدة على الأقل قيمة Ū تساوي الصفر، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، ولكن هناك حل بديل عند التنفيذ في الخلية التي لديها القيمة صفر.

ثانياً: إذا كانت مسألة النقل Max (مسألة تعظيم إيرادات):

- إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة Ū موجبة لخلية واحدة على الأقل، اختر الخلية التي لديها أكبر قيمة موجبة ونفذ عليها عملية النقل.

- إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ سالبة لكل الخلايا غير المستخدمة، قف فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.
- إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ سالبة لكل الخلايا غير المستخدمة إلا لخلية واحدة على الأقل قيمة $\bar{U}$ تساوي الصفر، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، ولكن هناك حل بديل عند التنفيذ في الخلية التي لديها القيمة صفر.

أظهرت نتائج التقييم أن قيمة $\bar{U}_{21}$ هي أصغر قيمة سالبة، وعليه يمكن تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية، حيث إن الأثر على التكلفة الكلية هو التخفيض بقيمة ٥٠ ريالاً للطن الواحد. لكن ماهي الكمية التي يمكن تنفيذ عملية النقل عليها لصالح هذه الخلية. للإجابة عن هذا السؤال يمكن العودة إلى أسلوب الحلقة المغلقة التي تم تطبيقها على هذه الخلية $CELL_{21}$. بالعودة إلى مسار الحلقة المغلقة للخلية $CELL_{21}$ نجد أننا وضعنا إشارة موجب في الخلايا $CELL_{21}$ و$CELL_{12}$، وإشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$ و$CELL_{22}$. للخلايا التي فيها إشارة سالب $CELL_{11}$ و$CELL_{22}$، نقارن بين الكميات X_{11} وX_{22}، ونطرح الكمية الأقل من كلٍ من الخليتين، ثم نضيف هذه الكمية إلى الكميات X_{21} وX_{12} في الخلايا $CELL_{21}$ و$CELL_{12}$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول رقم (١٦ , ٦)، حيث $X_{11}=10, X_{12}=30, X_{21}=25, X_{23}=5, X_{33}=25, X_{34}=25$.

الجدول رقم (١٦ , ٧): يوضح تحديد الكمية المنقولة للخلية ٢١ والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	الرياض (1)	الدمام (2)	جدة (3)	أبها (4)	المعروض
حرض(1)	110 10	110 30	150	180	40
الخرج(2)	70 25	120	150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	140 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

أما التكلفة الكلية فقد انخفضت بقيمة ٥٠ ريالاً للطن، وحيث إن عملية التنفيذ تمت على ٢٥ طن منقول إلى الخلية $CELL_{21}$ فإن الانخفاض في التكلفة أصبح (٥٠×٢٥=١٢٥٠)، ولذلك فالتكلفة الكلية تساوي:

ت.ك = ١٥٦٥٠ – ١٢٥٠ = ١٤٤٠٠ ريالاً

كما يمكن حسابها كما فعلنا سابقاً:

ت.ك=[(١٠×١١٠)+(٣٠×١١٠)+(٢٥×٧٠)+(٥×١٥٠)+(٢٥×١٤٠)+(٢٥×١٦٠)

]=١٤٤٠٠ ريالاً

نستمر في عملية التحقق من وصولنا إلى الحل الأمثل كما وضحنا سابقاً، وذلك بتقييم الخلايا غير المستخدمة في الجدول الجديد، وسنستمر في عمل ذلك حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

$\bar{U}_{13} = 100 + 70 - 100 - 110 = -40$

$\bar{U}_{14} = 180 + 140 + 70 - 160 - 150 - 110 = -30$

$\bar{U}_{22} = 120 + 110 - 110 - 70 = +50$

$\bar{U}_{24} = 170 + 140 - 160 - 150 = 0$

$\bar{U}_{31} = 120 + 150 - 70 - 140 = +60$

$\bar{U}_{32} = 140 + 110 + 150 - 110 - 70 - 140 = +80$

أظهرت نتائج التقييم أن قيمة $\bar{U}_{13}$ هي أصغر قيمة سالبة، ومن ثم يمكن تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية حيث إن الأثر على التكلفة الكلية هو التخفيض بقيمة ٤٠ ريالاً للطن الواحد وبالعودة إلى مسار الحلقة المغلقة للخلية $CELL_{13}$ نجد أننا وضعنا إشارة موجب في الخلايا $CELL_{13}$ و$CELL_{21}$، وإشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$ و$CELL_{23}$. وحيث إن الكمية X_{23} أقل من الكمية X_{11}، فإننا نطرح الكمية ($X_{23}=5$) من الكمية في الخلية $CELL_{23}$ فتصبح $X_{23}=5-5=0$ ، ومن الكمية في الخلية $CELL_{11}$ فتصبح $X_{11}=10-5=5$، ونضيف هذه الكمية إلى الكميات في الخلايا ذات الإشارة الموجبة فتصبح $X_{13}=5$ و$X_{21}=30$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول رقم (٧ ,١٧)، حيث $X_{11}=5$, $X_{12}=30$, $X_{13}=5$, $X_{21}=30$, $X_{33}=25$, $X_{34}=25$.

الجدول رقم (٧ ,١٧). يوضح تحديد الكمية المنقولة للخلية رقم ١٣ والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

المعروض	أبها (4)	جدة (3)	الدمام (2)	الرياض (1)	
40	180	150	110 / 30	110 / 5	حرض(1)
30	170	150 / 5	120	70	الخرج(2)
50	160 / 25	140 / 25	140	120 / 30	بريدة(3)
120	25	30	30	35	المطلوب

التكلفة الكلية انخفضت بقيمة ٤٠ ريالاً للطن، وحيث إن عملية التنفيذ تمت على ٥ أطنان منقولة إلى الخلية $CELL_{13}$، فإن الانخفاض في التكلفة أصبح (٤٠×٥=٢٠٠)، ولذلك فالتكلفة الكلية تساوي:

ت.ك = ١٤٤٠٠ – ٢٠٠ =١٤٢٠٠ ريالاً

مرةً أخرى نستمر في عملية التحقق من وصولنا إلى الحل الأمثل، وذلك بتقييم الخلايا غير المستخدمة في الجدول الجديد (٧ , ٦) باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة. أظهرت عملية التقييم التالي:

$\bar{U}_{14} = 180 + 140 - 160 - 150 = +10$
$\bar{U}_{22} = 120 + 110 - 110 - 70 = +50$
$\bar{U}_{23} = 150 + 110 - 150 - 70 = +40$
$\bar{U}_{24} = 170 + 140 + 110 - 160 - 150 - 70 = +40$
$\bar{U}_{31} = 120 + 150 - 110 - 140 = +20$
$\bar{U}_{32} = 140 + 150 - 110 - 140 = +40$

حيث إن جميع قيم $\bar{U}$ موجبة والمطلوب تخفيض تكاليف النقل فقد وصلنا إلى الحل الأمثل كما في الجدول (٧ , ١٧)، وفيه سيتم نقل ٥ أطنان من حرض إلى الرياض و٣٠ طنًا إلى الدمام، و٥ أطنان إلى جدة، ومن الخرج ٣٠ طنًا إلى الرياض، ومن بريدة ٢٥ طنًا إلى جدة، و٢٥ طنًا إلى أبها، وذلك بتكلفة كلية تساوي ١٤٢٠٠ ريالاً.

ثانياً: طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method :

هذه الطريقة مشابهة إلى حدٍ ما بطريقة الحجر المتدحرج، إلا أنها تستخدم المنفعة المستهلكة في الخلايا المستخدمة لإيجاد المنفعة المفقودة للخلايا غير المستخدمة بأسلوب رياضي، أو بمعنى آخر إيجاد التكلفة الحدية لنقل وحدة واحدة إلى الخلية غير المستخدمة.

خطوات طريقة التوزيع المعدلة:

١ – أوجد الحل الأولي باستخدام أي طريقة شئت من الطرق السابقة لإيجاد الحل الأولي كما في الجدول (٧ , ١٨).

٢ –أوجد عمود إلى يسار الجدول وارمز له بالرمز u_i وصف أعلى الجدول وارمز له بالرمز v_j حيث (u_i+v_j) تمثل المنفعة المستهلكة للخلايا.

٣ –أوجد قيم u_i وv_j باستخدام المعادلة التالية للخلايا المستخدمة، (حيث المنفعة المفقودة تساوي صفر):

$c_{ij} = u_i + v_j$ أو $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

٤-أوجد المنفعة المفقودة أو التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة k_{ij} كالتالي:

$$k_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

٥-اختر الخلية $CELL_{ij}$ ذات أصغر قيمة سالبة للمنفعة k_{ij} (أكبر قيمة موجبة في حالة التعظيم).

٦-طبق مسار الحلقة المغلقة على الخلية المختارة.

٧-نفذ عملية النقل، وذلك بنقل أصغر كمية موجودة في الخلايا ذات الإشارة السالبة إلى الخلايا ذات الإشارة الموجبة. (في حالة تعظيم إيرادات النقل اختر الخلية غير المستخدمة التي تعطي أكبر قيمة موجبة للمنفعةk_{ij}).

٨-أعد تطبيق الخطوات (٣ , ٧) على الجدول الجديد حتى نصل إلى الحل الأمثل.

الجدول رقم (١٨ , ٧). يوضح الحل الأولي الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

	v_j	v_1=	v_2=	v_3=	v_4=	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
u_1=	حرض 1	110 35	110 5	150	180	40
u_2=	الخرج 2	70	120 25	150 5	170	30
u_3=	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

بافتراض أن (u_i=0) فيمكن إيجاد قيم u_i وv_j الأخرى من الجدول رقم (١٨ , ٧) بمعلومية تكلفة النقل c_{ij} كالتالي، والموضح في الجدول رقم (١٩ , ٧):

$u_1 + v_1 = 110$ ========➔ $v_1 = 110$
$u_1 + v_2 = 110$ ========➔ $v_2 = 110$
$u_2 + v_2 = 120$ ========➔ $u_2 = 10$
$u_2 + v_3 = 150$ ========➔ $v_3 = 140$
$u_3 + v_3 = 140$ ========➔ $u_3 = 0$
$u_3 + v_4 = 160$ ========➔ $v_4 = 160$

الجدول رقم (١٩ , ٧). يوضح إيجاد قيم u_i وv_j للجدول الأولي الممكن.

	v_j	v_1=110	v_2=110	v_3=140	v_4=160	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
u_1=0	حرض 1	110 (35)	110 (5)	150	180	40
u_2=10	الخرج 2	70	120 (25)	150 (5)	170	30
u_3=0	بريدة 3	120	140	140 (25)	160 (25)	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

يمكن الآن إيجاد قيم k_{ij} للخلايا غير المستخدمة كما يلي:

$k_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$
$k_{13} = 150 - 0 - 140 = 10$
$k_{14} = 180 - 0 - 160 = 20$
$k_{21} = 70 - 10 - 110 = -50$
$k_{24} = 170 - 10 - 160 = 0$
$k_{31} = 120 - 0 - 110 = 10$
$k_{32} = 140 - 0 - 110 = 30$

الجدول رقم (٢٠ , ٧). يوضح تحديد الكمية المنقولة للخلية ٢١ والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	v_j	v_1=	v_2=	v_3=	v_4=	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
u_1=	حرض 1	110 (110)	110 (5)	150	180	40
u_2=	الخرج 2	70 (25)	120 (25)	150 (5)	170	30
u_3=	بريدة 3	120	140	140 (25)	160 (25)	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

من قيم k_{ij} السابقة نجد أن قيمة k_{21} هي أصغر قيمة سالبة. سنقوم الآن بتطبيق مسار الحلقة المغلقة، وذلك بوضع إشارة موجب في الخلايا $CELL_{21}$ و$CELL_{12}$، وإشارة سالب في الخلايا

$CELL_{11}$ و$CELL_{22}$. وحيث إن الكمية X_{22} أقل من الكمية X_{11}، فإننا نطرح الكمية ($X_{22}=25$) من الكمية في الخلية $CELL_{22}$ فتصبح $X_{22}=25-25=0$، ومن الكمية في الخلية $CELL_{11}$ فتصبح $X_{11}=10$، ونضيف هذه الكمية إلى الكميات في الخلايا ذات الإشارة الموجبة فتصبح $X_{12}=30$ و$X_{21}=25$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول رقم (٢٠ , ٧)، حيث $X_{11}=10, X_{12}=30, X_{21}=25, X_{23}=5, X_{33}=25,$ $X_{34}=25$.

نتابع بإيجاد قيم u_i وv_j للجدول السابق بافتراض أن ($u_i=0$) وبمعلومية تكلفة النقل c_{ij} ، والموضح في الجدول رقم (٢١ , ٧):

$u_1 + v_1 = 110$ ========➔ $v_1 = 110$
$u_1 + v_2 = 110$ ========➔ $v_2 = 110$
$u_2 + v_2 = 70$ ========➔ $u_2 = -40$
$u_2 + v_3 = 150$ ========➔ $v_3 = 190$
$u_3 + v_3 = 140$ ========➔ $u_3 = -50$
$u_3 + v_4 = 160$ ========➔ $v_4 = 210$

الجدول رقم (٢١ , ٧). يوضح إيجاد قيم u_i وv_j للجدول الثاني.

	v_j	$v_1=110$		$v_2=110$		$v_3=190$		$v_4=210$		
المعروض		الرياض 1		الدمام 2		جدة 3		أبها 4		المعروض
$U_1=0$	حرض 1		110		110		150		180	40
		10		30						
$u_2=-40$	الخرج 2		70		120		150		170	30
		25				5				
$u_3=-50$	بريدة 3		120		140		140		160	50
						25		25		
120	المطلوب	35		30		30		25		120

نوجد المنفعة المفقودة للخلايا غير المستخدمة k_{ij} مرةً أخرى:

$k_{13} = 150 – 0 – 190 = -40$
$k_{14} = 180 – 0 – 210 = -30$
$k_{22} = 120 – (-40) – 110 = 50$
$k_{24} = 170 – (-40) – 210 = 0$
$k_{31} = 120 – (-50) – 110 = 60$
$k_{32} = 140 – (-50) – 110 = 80$

نجد من قيم k_{ij} السابقة أن قيمة k_{13} هي أصغر قيمة سالبة. سنقوم الآن بتطبيق مسار الحلقة المغلقة وذلك بوضع إشارة موجب في الخلايا $CELL_{13}$ و$CELL_{21}$، وإشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$

و$CELL_{23}$. حيث إن الكمية $X_{23}=5$ أقل من الكمية X_{11} فإننا نحذف هذه الكمية من الخلية $CELL_{23}$ فتصبح $X_{23}=0$ ونطرحها من الكمية في الخلية $CELL_{11}$ فتصبح $X_{11}=5$، ونضيف هذه الكمية إلى الكميات في الخلايا ذات الاشارة الموجبة فتصبح $X_{13}=5$ و$X_{21}=30$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول رقم (٢٣ , ٧)، حيث $X_{11}=5, X_{12}=30, X_{13}=5, X_{21}=30, X_{33}=25, X_{34}=25$.

الجدول رقم (٢٢ , ٧). يوضح تحديد الكمية المنقولة للخلية ١٣ والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	v_j	$v_1=$		$v_2=$		$v_3=$		$v_4=$		
u_i		الرياض 1		الدمام 2		جدة 3		أبها 4		المعروض
$u_1=$	حرض 1		110		110		150		180	40
		5		30		**5**				
$u_2=$	الخرج 2		70		120		150		170	30
		25								
$u_3=$	بريدة 3		120		140		140		160	50
						25		25		
	المطلوب	35		30		30		25		120

مرةً أخرى نوجد قيم u_i وv_j للجدول السابق بافتراض أن $(u_i=0)$ وبمعلومية تكلفة النقل c_{ij} ، والموضح في الجدول رقم (٢٣ , ٧) كالتالي:

$u_1 + v_1 = 110$ ========➔ $v_1 = 110$
$u_1 + v_2 = 110$ ========➔ $v_2 = 110$
$u_1 + v_3 = 150$ ========➔ $v_3 = 150$
$u_2 + v_1 = 70$ ========➔ $u_2 = -40$
$u_3 + v_3 = 140$ ========➔ $u_3 = -10$
$u_3 + v_4 = 160$ ========➔ $v_4 = 170$

الجدول رقم (٢٣ , ٧). يوضح إيجاد قيم u_i وv_j للجدول الثالث.

	v_j	v_1=110	v_2=110	v_3=150	v_4=170	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
U_1=0	حرض 1	110 5	110 30	150 5	180	40
u_2=-40	الخرج 2	70 30	120	150	170	30
u_3=-10	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

كذلك نوجد المنفعة المفقودة للخلايا غير المستخدمة k_{ij} مرةً أخرى:

k_{14} = 180 – 0 – 170 = 10
k_{22} = 120 – (-40) – 110 = 50
k_{23} = 150 – (-40) – 150 = 40
k_{24} = 170 – (-40) – 170 = 40
k_{31} = 120 – (-10) – 110 = 20
k_{32} = 140 – (-10) – 110 = 40

وحيث إن جميع قيم k_{ij} السابقة موجبة، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل كما هو في الجدول رقم (٢٤ , ٧). وهو الحل نفسه الذي وصلنا إليه باستخدام طريقة المسار الحرج، وفيه التكلفة الكلية تساوي ١٤٢٠٠ ريالاً.

الجدول رقم (٢٤ , ٧). يوضح الحل الأمثل للمسألة رقم (١ , ٧) باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

	v_j	v_1=	v_2=	v_3=	V_4=	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
u_1=	حرض 1	110 5	110 30	150 5	180	40
u_2=	الخرج 2	70 30	120	150	170	30
u_3=	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الحالة الثانية: الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة:

انظر [Gould et al, 1991] و[Kalavathy, 2002] و[Render et al, 2003]:

كانت تطبيقاتنا السابقة على حالة التعادل بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، وهي حالة نادراً ما تحدث. الآن يمكن لنا التعامل مع حالة أن الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة، وهي حالة من الحالات المتوقع حدوثها. التعامل مع هذه الحالة لا يختلف عما سبق إلا في شيء واحد فقط، وهو إضافة عمود يُسمى وهمي (Dummy)، قيمة التكلفة الخاصة بالنقل فيه تساوي صفر.

مسألة رقم (٢ , ٧). الجدول رقم (٢٥ , ٧) يمثل تعديلاً أحدثناه على الكمية المعروضة في المسألة السابقة رقم (١ , ٧) بحيث تصبح الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة بعدد ١٠ أطنان.

الجدول رقم (٢٥ , ٧). يوضح جدول النقل للمسألة رقم (٢ , ٧) بعد إضافة عمود وهمي.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110	110	150	180	0	50
الخرج2	70	120	150	170	0	30
بريدة3	120	140	140	160	0	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

الجدول رقم (٢٦ , ٧). يوضح الحل الأولي الممكن باستخدم طريقة الركن الشمالي الغربي للمسألة رقم (٢ , ٧).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 35	110 15	150	180	0	50
الخرج2	70	120 15	150 15	170	0	30
بريدة3	120	140	140 15	160 25	0 10	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

الآن أصبح عدد أعمدة الجدول رقم (٧ , ٢٥) ٥ أعمدة، وذلك بإضافة عمود وهمي بكمية مطلوبة ١٠ أطنان لزيادة الكمية المطلوبة حتى تتساوى مع الكمية المعروضة. لبدء الحل يمكن استخدام أي طريقة من الطرق السابقة لإيجاد الحل الأولي الممكن. يمثل الجدول رقم (٧ , ٢٦) الحل الأولي الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة وطريقة الحجر المتدحرج لإيجاد الحل الأمثل، نبدأ بتقييم الخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{13} = 10$ $\bar{U}_{14} = 20$ $\bar{U}_{15} = 0$ $\bar{U}_{21} = -50$
$\bar{U}_{24} = 0$ $\bar{U}_{25} = -10$ $\bar{U}_{31} = 10$ $\bar{U}_{32} = 30$

قيمة $\bar{U}$ للخلية $CELL_{21}$ هي أصغر قيمة سالبة، ولذلك يمكن لنا تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية كما فعلنا في المسألة السابقة رقم (٧ , ١) والجدول التالي رقم (٧ , ٢٧) يمثل الحل لهذه المرحلة.

الجدول رقم (٧ , ٢٧). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (٢١) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 20	110 30	150	180	0	50
الخرج2	70 15	120	150 15	170	0	30
بريدة3	120	140	140 15	160 25	0 10	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

نقيّم الخلايا غير المستخدمة مرةً أخرى.

$\bar{U}_{13} = -40$ $\bar{U}_{14} = -30$ $\bar{U}_{15} = -50$ $\bar{U}_{22} = 50$
$\bar{U}_{24} = 0$ $\bar{U}_{25} = -10$ $\bar{U}_{31} = 60$ $\bar{U}_{32} = 80$

قيمة $\bar{U}$ للخلية $CELL_{15}$ هي أصغر قيمة سالبة، ولذلك يمكن لنا تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية والجدول رقم (٧ , ٢٨) يمثل الحل لهذه المرحلة.

الجدول رقم (٧ , ٢٨). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية ١٥ والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 10	110 30	150	180	0 10	50
الخرج2	70 70	120	150 5	170	0	30
بريدة3	120	140	140 25	160 25	0	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

نقيّم الخلايا غير المستخدمة مرةً أخرى.

$\bar{U}_{13} = -40$ $\bar{U}_{14} = -30$ $\bar{U}_{22} = 50$ $\bar{U}_{24} = 0$

$\bar{U}_{25} = 40$ $\bar{U}_{31} = 60$ $\bar{U}_{32} = 80$ $\bar{U}_{35} = 50$

قيمة $\bar{U}$ الخلية $CELL_{13}$ هي أصغر قيمة سالبة، ولذلك يمكن لنا تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية والجدول رقم (٧ , ٢٩) يمثل الحل لهذه المرحلة.

الجدول رقم (٧ , ٢٩). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (١٣) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 5	110 30	150 5	180	0 10	50
الخرج2	70 30	120	150 5	170	0	30
بريدة3	120	140	140 25	160 25	0	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

نقيّم الخلايا غير المستخدمة مرةً أخرى.

$\bar{U}_{14} = 10$ $\bar{U}_{21} = 50$ $\bar{U}_{22} = 4\ 0$ $\bar{U}_{23} = 40$

$\bar{U}_{24} = 40$ $\bar{U}_{31} = 20$ $\bar{U}_{32} = 40$ $\bar{U}_{35} = 10$

حيث إن قيم $\bar{U}$ كلها موجبة، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، وفيه حرض تستبقي لديها ١٠ أطنان، وهي الفائض نتيجةً لزيادة الكمية المعروضة على الكمية المطلوبة.

ت.ك. = ١٤٢٠٠ ريالاً

الحالة الثالثة: الكمية المعروضة أصغر من الكمية المطلوبة:

انظر [Gould et al, 1991] و[Kalavathy, 2002] و[Render et al, 2003]:

مثل الحالة السابقة، هذه حالة من الحالات التي يُتوقع حدوثها، ويمكن لنا التعامل مع هذه الحالة كما تعاملنا مع الحالة السابقة، وذلك بإضافة صف يُسمى وهمي (Dummy)، قيمة التكلفة الخاصة بالنقل فيه تساوي صفر.

الجدول رقم (٧,٣٠). يوضح جدول النقل للمسألة رقم (٧,٣) بعد إضافة صف وهمي.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض1	110	110 30	150	180	40
الخرج2	70	120	150	170	30
بريدة3	120	140	140	160	40
وهمي4	0	0	0	0	10
المطلوب	35	30	30	25	

الجدول رقم (٧,٣١). يوضح الحل الأمثل للمسألة رقم (٧,٣).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض1	110 5	110 30	150 5	180	40
الخرج2	70 30	120	150	170	30
بريدة3	120	140	140 25	160 15	40
وهمي4	0	0	0	0 10	10
المطلوب	35	30	30	25	

ت.ك. = ١٢٦٠٠ ريالاً

مسالة رقم (٧,٣). والجدول رقم (٧,٣٠) يمثل تعديلاً أحدثناه على الكمية المعروضة في المسألة رقم (٧,١) بحيث تصبح الكمية المعروضة أصغر من الكمية المطلوبة بعدد ١٠ أطنان.

الجدول السابق رقم (٧,٣١) يمثل الحل الأمثل. (حاول الحل لتصل إلى نفس هذه النتيجة)

حالة التحلل Degenerate Case:

انظر [Gould et al, 1991] و[Daellenbach et al, 1983] و[Render et al, 2003].

تحدث حالة التحلل في جداول النقل عندما: (عدد الخلايا المستخدمة < عدد الصفوف + عدد الأعمدة –١) ويدخل في ذلك الصف أو العمود الوهمي. وهذه الحالة غير مرغوب فيها، والسبب في ذلك أنه لا يمكن استخدام طريقة الحجر المتدحرج أو طريقة التوزيع المعدلة لإيجاد الحل الأمثل مما يستدعي إيجاد وسائل للتغلب على هذه المشكلة عند حدوثها وكثيراً ما تحدث. لعلاج مشكلة التحلل يمكن تحويل إحدى الخلايا غير المستخدمة إلى خلية اصطناعية مستخدمة (Artificial Used Cell)، وذلك بملء عددٍ من الخلايا غير المستخدمة بكمية اصطناعية تساوي الصفر (اصطناعية؛ لأنها في الحقيقة خلية غير مستخدمة) حتى تتحول الحالة إلى حالة عدم التحلل (عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة –١)، عندئذٍ يمكن لنا استخدام طريقة الحجر المتدحرج أو طريقة التوزيع المعدلة لإيجاد الحل الأمثل.

مسألة رقم (٧,٤). المسألة التالية كما في الجدول رقم (٧,٣٢) توضح هذه الحالة، في مثالنا هذا استخدمنا طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي الممكن، ويلاحظ هنا حالة التحلل؛ لأن عدد الخلايا المستخدمة في هذا الجدول ٤ خلايا والمطلوب ٦ خلايا مستخدمة، حيث لدينا ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة. سنختار عشوائياً الخلايا $CELL_{21}$ و$CELL_{32}$ ونملأهما بالكمية الاصطناعية صفر، فيصبح لدينا ٦ خلايا مستخدمة، ونخرج من حالة التحلل كما في الجدول التالي رقم (٧،٣٣).

الجدول رقم (٧,٣٢). يوضح تكاليف النقل والكميات المعروضة والمطلوبة للمسألة رقم (٧,٤).

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10	12 20	8	10	20
3	6	8	12 30	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	85

الجدول رقم (٧ , ٣٣). يوضح الحل الأولي الممكن وحدوث حالة التحلل.

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10 0	12 20	8	10	20
3	6	8 0	12 30	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	85

ت.ك = ٩٠٠ ريالٍ.

باستخدام طريقة الحجر المتدحرج لإيجاد الحل الأمثل، نبدأ بإيجاد قيم $\bar{U}$ التالية للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 1, \quad \bar{U}_{13} = -1, \quad \bar{U}_{14} = 3, \quad \bar{U}_{23} = -8, \quad \bar{U}_{24} = -4, \quad \bar{U}_{31} = 0.$

سننفذ عملية النقل على الخلية $CELL_{23}$ ($\bar{U}_{23}$ أصغر قيم سالبة) والموضحة في الجـــدول رقم (٧ , ٣٤).

الجدول رقم (٧ , ٣٤). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية ٢٣ والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10 0	12	8	10	20
3	6	8 20	12 10	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	85

ت.ك = ٧٤٠ ريالاً.

لاحظ أن الخلية $CELL_{21}$ خلية فارغة في الحقيقة لكن بقيت فيها الكمية صفر من الجدول السابق، ولذلك سنظل في حالة التحلل في هذا الجدول. مرةً أخرى باستخدام طريقة الحجر المتدحرج نوجد قيم $\bar{U}$ التالية للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 7, \quad \bar{U}_{13} = 9, \quad \bar{U}_{14} = 11, \quad \bar{U}_{22} = 8, \quad \bar{U}_{24} = 4, \quad \bar{U}_{31} = -8.$

ننفذ الآن عملية النقل على الخلية $CELL_{31}$ ($\bar{U}_{31}$ أصغر قيم سالبة) ,الموضحة في الجدول رقم (٧ , ٣٥).

الجدول رقم (٧ , ٣٥). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (٣١) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10	12	8 20	10	20
3	6 0	8 20	12 10	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	85

ت.ك = ٧٤٠ ريالاً.

نلاحظ هنا أن قيمة التكلفة الكلية لم يتغير برغم تغير خط النقل، وذلك لأن التنفيذ تم على خلية مشغولة $CELL_{21}$ بالكمية صفر والتي تم نقلها إلى الخلية $CELL_{31}$، وكل ذلك حدث بسبب وجود حالة التحلل. نوجد الآن قيم $\bar{U}$ الجديدة للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 1, \quad \bar{U}_{13} = -1, \quad \bar{U}_{14} = 3, \quad \bar{U}_{21} = 8, \quad \bar{U}_{22} = 8, \quad \bar{U}_{24} = 4.$

ننفذ الآن عملية النقل على الخلية $CELL_{13}$ والموضحة في الجدول رقم (٧ , ٣٦).

الجدول رقم (٧, ٣٦). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (١٣) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	1	2	3	4	المعروض
1	5 0	8	10 10	12	10
2	10	12	8 20	10	20
3	6 10	8 20	12	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	85

ت.ك = ٧٣٠ ريالاً.

قيم Ū الجديدة للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 1, \quad \bar{U}_{14} = 3, \quad \bar{U}_{21} = 7, \quad \bar{U}_{22} = 7, \quad \bar{U}_{24} = 3, \quad \bar{U}_{33} = 1.$

حيث إن جميع قيم Ū الجديدة للخلايا غير المستخدمة موجبة، وحيث إن دالة الهدف للمسألة هو تخفيض تكاليف النقل، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.

حالة خاصة: حالة إغلاق بعض الطرق [Gould et al, 1991] و[Render et al, 2003]:

مسألة رقم (٧, ٥): ماذا يحدث لو أن بعض طرق ممنوعة (مغلقة)، مثلاً لو كان من الممنوع النقل من بريدة إلى جدة. في هذه الحالة لابد من تغيير تكلفة النقل من بريدة إلى جدة من ١٤٠ ريالاً إلى قيمة كبيرة جداً نسميها M. هذا يعني أن الجدول الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي سيظهر كالتالي كما في الجدول رقم (٧, ٣٧).

الجدول رقم (٧, ٣٧). يوضح تكاليف النقل للمسألة رقم (٧, ٥) ووجود طريق مغلق تكلفته M.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 35	110 5	150	180	40
الخرج(2)	70	120 25	150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	M 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

بعد تقييم الخلايا غير المستخدمة ظهرت لنا القيم التالية:

$\bar{U}_{13} = 10$ $\bar{U}_{14} = M-120$ $\bar{U}_{21} = -50$
$\bar{U}_{24} = M-140$ $\bar{U}_{31} = 150-M$ $\bar{U}_{32} = 170-M$

أصغر قيمة سالبة للمنفعة $\bar{U}$ موجودة في الخلية غير المستخدمة $CELL_{31}$. يمكن الآن تنفيذ عملية النقل لهذه الخلية، وسيظهر لنا كما في الجدول رقم (٧ , ٣٨). نلاحظ هنا أن عدد الخلايا المشغولة أقل مما هو مطلوب في حالة عدم التحلل، ولذلك سنملأ إحدى الخلايا غير المستخدمة ولتكن الخلية CELL33 بالكمية صفر، ونستمر في عملية التقييم حتى نصل إلى الحل الأمثل كما هو موضح في الجدول من (٧ , ٣٨) إلى الجدول رقم(٧ , ٤١)، والحل الأمثل موجود في الجدول رقم (٧ , ٤١).

الجدول رقم (٧ , ٣٨). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (٣١) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
40	180	150	110 30	110 10	حرض(1)
30	170	150 30	120	70	الخرج(2)
50	160 25	M 0	140	120 25	بريدة(3)
120	25	30	30	35	المطلوب

$\bar{U}_{13} = -M+160$ $\bar{U}_{14} = 30$ $\bar{U}_{21} = M-200$
$\bar{U}_{22} = M-150$ $\bar{U}_{24} = M-140$ $\bar{U}_{32} = 20$ $\bar{U}_{33} = 0$

الجدول رقم (٧ , ٣٩). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (١٣) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
40	180	150	110 30	110 10	حرض(1)
30	170	150 30	120	70	الخرج(2)
50	160 25	M 0	140	120 25	بريدة(3)
120	25	30	30	35	المطلوب

$\bar{U}_{13} = 0$ $\bar{U}_{14} = 30$ $\bar{U}_{21} = -40$
$\bar{U}_{22} = 10$ $\bar{U}_{32} = 20$ $\bar{U}_{33} = M-160$

الجدول رقم (٤٠ , ٧). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (٢١) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110	110 30	150 10	180	40
الخرج(2)	70 10	120	150 20	170	30
بريدة(3)	120 25	140	M	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

$\bar{U}_{11} = 40$ $\bar{U}_{14} = 70$ $\bar{U}_{22} = 10$
$\bar{U}_{24} = 60$ $\bar{U}_{32} = -20$ $\bar{U}_{33} = M-200$

الجدول رقم (٤١ , ٧). يوضح نقل أكبر كمية ممكنة للخلية رقم (٣٢) والتي تمثل أكبر منفعة ممكنة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110	110 30	150 30	180	40
الخرج(2)	70 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120 5	140 20	M	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

$\bar{U}_{11} = 20$ $\bar{U}_{14} = 50$ $\bar{U}_{22} = 30$
$\bar{U}_{23} = 20$ $\bar{U}_{24} = 60$ $\bar{U}_{33} = M-180$

ت.ك. = ١٥١٠٠ ريالاً

تحليل الحساسية لمسألة النقل:

رأينا سابقاً في موضوع تحليل الحساسية لمسائل البرمجة الخطية كيف يمكن معرفة الأثر الذي يظهر على الحل الأمثل عند تغير عنصرٍ أو أكثر من عناصر البرنامج الخطي، وحيث إن مسألة النقل ما هي إلا تطبيق من تطبيقات لبرمجة الخطية، فإن استخدام التحليل السابق ممكن باستخدام مخرجات برنامج Lindo، أو باستخدام جداول النقل. سنركز في حديثنا هنا على دراسة تحليل الحساسية باستخدام جداول النقل.

من المسألة رقم (١ , ٧) وجدنا عند الحل الأمثل أن المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=5, X_{12}=30,$ $X_{13}=5, X_{21}=30, X_{33}=25, X_{34}=25$ وأن باقي المتغيرات غير أساسية وأن قيمة دالة الهدف تساوي ١٤٢٠٠ ريالٍ.

أولاً: أثر التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

انظر [Winston, 2004] و[Wagner, 1989].

١ - أثر التغير في معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف:

إذا تغير المعامل C_{ij} للمتغير غير الأساسي X_{ij} في دالة الهدف ضمن المدى المسموح به فإن هذا التغير لن يغير الحل الأمثل، ولا قيم المتغيرات، ولا قيمة دالة الهدف [Winston, 2004]. ولمعرفة هذا المدى لمعاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف لمسألة النقل في حالة تخفيض التكاليف (Min) فإن الحد الأعلى يكون دائماً وأبداً مالا نهاية، حيث إن التكلفة الحالية لهذا المتغير غير مقبولة حالياً، مما جعل الكمية المنقولة تساوي صفراً فكيف سيكون الحال لو زادت هذه التكلفة؟ أما قيمة الحد الأدنى فيمكن إيجادها بطرح التكلفة المخفضة من التكلفة الحالية لهذا المتغير والتكلفة المخفضة هنا يمكن إيجادها باستخدام طريقة الحجر المتدحرج من قيمة $\bar{U}_{ij}$ أو باستخدام طريقة التوزيع المعدلة من قيمة k_{ij}.

في المسألة رقم (١ , ٧) نجد أن X_{14} متغير غير أساسي وتكلفته الحالية ١٨٠ ريالاً للطن الواحد، وحيث إن قيمة $\bar{U}_{14}=10$ باستخدام طريقة الحجر المتدحرج (جدول رقم (١٧ , ٧)، أو قيمة $k_{14}=10$ باستخدام طريقة التوزيع المعدلة (جدول رقم (٢٤ , ٧)، فإن الحد الأدنى لمعامل $X_{14}=180-10=170$ بمعنى آخر إذا كانت $170 \leq C_{14} \leq \infty$ فإن الحل الأمثل لن يتغير، ولن تتغير قيم المتغيرات، ولن تتغير قيمة دالة الهدف، أما إذا انخفضت تكلفة هذا المتغير عن ١٧٠ ريالاً مع ثبات العناصر الأخرى، فإن الحل الأمثل سيتغير، وستتغير قيم المتغيرات، وستتغير قيمة دالة الهدف، ويتحول

هذا المتغيرُ من متغير غير أساسي إلى متغيرٍ أساسي. أما إذا كانت تكلفة هذا المتغير تساوي ١٧٠ ريالاً بالضبط فسيكون لدينا حل بديل أو متعدد (Multiple or Alternative Optimal Solution) بمعنى سيكون لدينا حلين، الأول يبقى الحال كما هو بدون تغير، والثاني سيتغير فيه الحل الأمثل، وستتغير قيم المتغيرات، ولكن تبقى قيمة دالة الهدف كما هي.

٢- أثر التغير في معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف:

إذا تغير المعامل C_{ij} للمتغير الأساسي X_{ij} في دالة الهدف ضمن المدى المسموح به، فإن هذا التغير لن يغير الحل الأمثل، ولا قيم المتغيرات ولكن ستتغير قيمة دالة الهدف [Winston, 2004]، ولمعرفة هذا المدى لمعاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف لمسألة النقل في حالة تخفيض التكاليف (Min)، فيمكن استخدام طريقة الحجر المتدحرج أو طريقة التوزيع المعدلة.

أ)باستخدام طريقة الحجر المتدحرج:

لمعرفة المدى الذي يتغير فيه معامل المتغير الأساسي X_{11}، مسألة (٧ ,١)، يمكن لنا النظر في الجدول الأخير (النهائي) في قيم $\bar{U}$ للخلايا الفارغة وحلقاتها المغلقة، والتي تتضمن الخلية $CELL_{11}$ عندما تكون الخلية تحمل إشارة موجب أو تحمل إشارة سالب. تتضمن قيم $\bar{U}$ التالية (جدول ٧ ,١٧) الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ موجبة وهي: $\bar{U}_{22}$ =+50, $\bar{U}_{23}$ =+40, $\bar{U}_{24}$ =+40. وحيث إن أصغر قيمة موجودة في $\bar{U}_{23}$ و $\bar{U}_{24}$ =+40 ، فإن النقصان المسموح به يساوي ٤٠ ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11}. وبالمثل يمكن إيجاد الزيادة المسموح بها وهي في قيم $\bar{U}$ (جدول رقم (٧ ,١٧)، والتي تتضمن الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ سالبة وهي: $\bar{U}_{31}$ =+20، وحيث إن أصغر قيمة وهي القيمة الوحيدة في حالتنا هذه موجودة في $\bar{U}_{31}$ =+20 ، فإن الزيادة المسموح بها تساوي ٢٠ ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11}.

ب) باستخدام طريقة التوزيع المعدلة:

بنفس الطريقة السابقة يمكن استخدام k_{ij} للخلايا الفارغة وحلقاتها المغلقة والتي تتضمن الخلية $CELL_{11}$ عندما تكون الخلية تحمل إشارة موجب أو تحمل إشارة سالب. في (جدول رقم (٧ ,٢٤) وهو الجدول الأخير)، تتضمن قيم k_{ij} التالية الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ موجبة وهي: k_{22} =+50, k_{23} =+40, k_{24} =+40. وحيث إن أصغر قيمة موجودة في k_{23} و k_{24} =+40 ، فإن النقصان المسموح به يساوي ٤٠ ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11}. وبالمثل يمكن إيجاد الزيادة المسموح بها، وهي في قيم k_{ij} (جدول رقم (٧ ,٢٤) والتي تتضمن الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ سالبة، وهي: k_{31} =+20 ، وحيث إن أصغر قيمة وهي القيمة الوحيدة في

حالتنا هذه موجودة في$k_{31}=+20$، فإن الزيادة المسموح بها تساوي ٢٠ ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11}.

كما يمكن استخدام الأسلوب الرياضي التالي فلو فرضنا أننا أضفنا القيمة Δ إلى تكلفة الكمية المنقولة في الخلية $CELL_{11}$ ، وعليه أصبحت $c_{11}=110+\Delta$ فيمكن إيجاد قيم u_i وv_j للجدول (٧ , ٢٤) وبمعلومية تكلفة النقل c_{ij} وأن $(u_i=0)$ كالتالي:

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 110 + \Delta &&\Longrightarrow\quad v_1 = 110 + \Delta\\
u_1 + v_2 &= 110 &&\Longrightarrow\quad v_2 = 110\\
u_1 + v_3 &= 150 &&\Longrightarrow\quad v_3 = 150\\
u_2 + v_1 &= 70 &&\Longrightarrow\quad u_2 = -40 - \Delta\\
u_3 + v_3 &= 140 &&\Longrightarrow\quad u_3 = -10\\
u_3 + v_4 &= 160 &&\Longrightarrow\quad v_4 = 170
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{14} &= 180 - 0 - 170 = 10\\
k_{22} &= 120 - (-40 - \Delta) - 110 = 50 + \Delta \geq 0 \Longrightarrow \Delta \leq 50\\
k_{23} &= 150 - (-40 - \Delta) - 150 = 40 + \Delta \geq 0 \Longrightarrow \Delta \leq 40\\
k_{24} &= 170 - (-40 - \Delta) - 170 = 40 + \Delta \geq 0 \Longrightarrow \Delta \leq 40\\
k_{31} &= 120 - (-10) - (110 + \Delta) = 20 - \Delta \leq 0 \Longrightarrow \Delta \geq 20\\
k_{32} &= 140 - (-10) - 110 = 40
\end{aligned}
$$

وهذا يعني أن ٤٠ ≤ Δ ≤ ٢٠ أو أن الزيادة المسموح بها تساوي ٤٠ والنقصان المسموح به يساوي ٢٠.

ثانياً: أثر التغير في قيم الجانب الأيمن:

انظر [Winston, 2004] و [Wagner, 1989].

عند استخدامنا لجداول النقل فإن جميع القيود في مسألة النقل تكون قيوداً نشطةً؛ وذلك لأننا سنواجه بثلاث حالات:

الحالة الأولى: الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة، ولهذا فإن مجموع الكمية المنقولة من العارض تساوي الكمية المعروضة (الجانب الأيمن)، وكذلك مجموع الكمية المنقولة للطالب تساوي الكمية المطلوبة (الجانب الأيمن). وفي هذه الحالة فإن الجانب الأيسر يساوي الجانب الأيمن لجميع القيود، وإذا كان لدينا حل أمثل، فإن جميع القيود تكون قيوداً نشطةً كما في القاعدة (٢ , ٣).

الحالة الثانية والثالثة: الكمية المعروضة أكبر (أصغر) من الكمية المطلوبة وعندئذٍ لابد من إضافة عمود (صف) وهمي تكون فيه الكمية المطلوبة (المعروضة) تساوي القيمة المطلقة للفرق بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، ومن ثم فإن مجموع الكمية المنقولة من العارض تساوي الكمية المعروضة، وكذلك مجموع الكمية المنقولة للطالب تساوي الكمية المطلوبة. وفي هاتين الحالتين فإن

الجانب الأيسر يساوي الجانب الأيمن لجميع القيود، وإذا كان لدينا حل أمثل فإن جميع القيود تكون قيوداً نشطةً كما في القاعدة (٢ , ٣).

ولهذا السبب فإن الحديث عن التغير في قيم الجانب الأيمن لن يفرّق بين القيود من حيث نشاطها. لاحظ أن هذا الأمر لا ينطبق عند الصياغة الرياضية باستخدام البرمجة الخطية إلا في حالة تساوي الكمية المعروضة والكمية المطلوبة.

إذا تغيرت الكمية المطلوبة والكمية المعروضة بالكمية Δ فسيكون لدينا حالتان:

١- إذا كان المتغير X_{ij} (في الصف i الكمية المعروضة المُزادة والعمود j الكمية المطلوبة المُزادة) متغيراً أساسياً فيجب زيادة الكمية X_{ij} بقيمة Δ ، ولهذا فإن الحل الأمثل لن يتغير، ولكن ستتغير قيم المتغيرات (الأثر فقط على المتغير X_{ij}) ، وستتغير قيمة دالة الهدف [Winston, 2004]، وتصبح:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (C_{ij} \times \Delta X_{ij})$$

يمكن استخدام المسألة رقم (١ , ٧) (الجدول رقم ١٧ , ٧)، فلو زادت الكمية المعروضة من حرض (١) والكمية المطلوبة من الدمام (٢) بقيمة ١٠ أطنان، فإن الحل الأمثل لن يتغير، ولكن ستتغير قيمة X_{12} ، وتصبح ٤٠ ، وكذلك تتغير قيمة دالة الهدف وتصبح ١٥٣٠٠ ريالاً ؛ وذلك لأن المتغير X_{12} متغيرٌ أساسيٌ والأثر سيظهر كما في جدول رقم (٤٢ , ٧).

$$\text{New Z-value} = 14200 + (110 \times 10) = 15300$$

الجدول رقم (٤٢ , ٧). يوضح الزيادة في المعروض من حرض والمطلوب من الدمام بقيمة ١٠ أطنان.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 40	150 5	180	50
الخرج(2)	70 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120	140	M 25	160 25	50
المطلوب	35	40	30	25	130

ويمكن أيضاً إيجاد قيمة دالة الهدف باستخدام مخرجات طريقة التوزيع المعدلة u_i وv_j حيث إنهما يمثلان السعر الثنائي أو سعر الظل بعد عكس الإشارة، وعلى ذلك وكما ذكرنا في قاعدة ٦-٥ فيمكن كتابة دالة الهدف الجديدة كالتالي:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + \Delta S.u_i + \Delta D.v_j$$

$$\text{New Z-value} = 14200 + 0(10) + 110(10) = 15300$$

٢- إذا كان المتغير X_{ij} (في الصف i الكمية المعروضة المُزادة والعمود j الكمية المطلوبة المُزادة) متغيراً غير أساسي فيجب إيجاد الحلقة المغلقة التي تتضمن هذا المتغير [Winston, 2004]. في هذه الحالة الخلايا ذات الإشارة (سالب) يتم زيادتها بالكمية Δ والخلايا ذات الإشارة (موجب) فيتم إنقاصها بالكمية Δ ، أما الخلية $CELL_{ij}$ والتي تمثل تقاطع صف الكمية المعروضة المُزادة وعمود الكمية المطلوبة المُزادة فتبقى كما هي. كمثال على ذلك يمكن استخدام المسألة رقم (٧, ١) و الجدول رقم (٧, ١٧) لإيضاح ما سيحدث فلو زادت الكمية المعروضة من حرض (١) والكمية المطلوبة من أبها (٤) بقيمة ١٠ أطنان، فإن الحل الأمثل لن يتغير، ولكن ستتغير قيمة X_{13} وتصبح ١٥ ، وقيمة X_{34} تصبح ٣٥ ، وذلك بإضافة قيمة ١٠ أطنان لكلٍ منهما، وتتغير قيمة X_{33} وتصبح ١٥، وذلك بطرح ١٠ أطنان منها، ولن تتغير قيمة X_{14} ، وتبقى غير أساسية، وكذلك تتغير قيمة دالة الهدف وتصبح ١٥٩٠٠ ريالٍ، والأثر سيظهر كما في جدول رقم (٧, ٤٣).

الجدول رقم (٧, ٤٣). يوضح الزيادة في المعروض من حرض والمطلوب من أبها بقيمة ١٠ أطنان.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 / 5	110 / 30	150 / 15	180	50
الخرج(2)	70 / 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120	140	140 / 15	160 / 35	50
المطلوب	35	30	30	35	130

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (C_{ij} \times \Delta X_{ij})$$

$$\text{New Z} = 14200 + 150(10) + 160(10) - 140(10) = 15900$$

أو،

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + \Delta S.u_i + \Delta D.v_j$$
$$\text{New Z-value} = 14200 + 10(0) + 10(170) = 15900$$

لكن يجب ملاحظة أنه إذا كانت الكمية Δ أكبر من أصغر كمية موجودة في الخلايا ذات الإشارة (موجب)، فإن الحل يتحول إلى حل غير ممكن إذا بدأنا الحل في هذه المرحلة جدول رقم (٧ , ١٧)، مما يعني أننا يجب أن نبدأ الحل من البداية. سنأخذ المسألة رقم (٧ , ١) والجدول رقم (٧ , ١٧) لإيضاح ما سيحدث فلو زادت الكمية المعروضة من حرض (١)، والكمية المطلوبة من أبها (٤) بقيمة ٣٠ طناً، فإن الخلية CELL33 ستأخذ إشارة موجب، وعليه لابد من إنقاص الكمية في هذه الخلية بالكمية ٣٠ فتتحول قيمة X_{33} ، وتصبح سالب ٥ ، وهذا غير مقبول حيث لا يمكن نقل كمية سالبة. لكن لإيجاد الحل لهذه المسألة نبدأ باستخدام أي طريقة لإيجاد الحل الأولي، ثم نستمر إلى أن نصل إلى الحل الأمثل، وهنا سيكون الحل النهائي الأمثل كما في جـــدول رقم (٧ , ٤٤).

الجدول رقم (٧ , ٤٤). يوضح الزيادة في المعروض من حرض والمطلوب من أبها بقيمة ٣٠ طناً.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150 30	180 5	70
الخرج(2)	70 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120	140	140	160 50	50
المطلوب	35	30	30	55	150

ت.ك. = ١٩٣٥٠ ريالاً

تماريـــــن

السؤال الأول: أوجد الحل الأمثل إن وُجد لمسألة النقل التالية، مع الشرح وإيجاد التكلفة الكلية.

From / To	1	2	3	Supply
A	5	4	2	70
B	6	3	2	50
C	1	5	1	10
Demand	50	50	30	130

السؤال الثاني: أوجد الحل الأمثل إن أمكن لمسألة النقل التالية مع الشرح وإيجاد التكلفة الكلية لكل جدول.

From / To	1	2	3	4	Supply
1	10	20	22	20	300
2	15	18	16	24	300
3	18	22	20	25	600
Demand	400	300	200	200	

السؤال الثالث: أوجد الجدول الأول والثاني إن أمكن مع إيجاد التكلفة الكلية، وأسباب الانتقال أو عدم الانتقال من جدول إلى آخر لمسألة النقل التالية.

From / To	1	2	3	Supply
1	10	30	20	40
2	20	15	30	20
3	20	10	20	10
Demand	25	15	30	

السؤال الرابع: أوجد الحل الأمثل إن أمكن لمسألة النقل في السؤال الثالث مع الشرح وإيجاد العائد الكلي لكل جدول في حالة Max.

تمرين وحله:

أوجد الحل الأمثل إن أمكن لمسألة النقل التالية مع الشرح وإيجاد التكلفة الكلية لكل جدول.

From / To	1	2	3	4	Supply
1	10	20	22	20	600
2	15	18	16	24	400
3	18	22	20	25	200
Demand	400	300	200	200	

الحل:

وحيث إن الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة، فلابد من إضافة عمود وهمي (Dummy)، وسنرمز له بالرمز D ، وتكون الكمية المطلوبة لهذا العمود تساوي القيمة المطلقة للفرق بين الكمية المعروضة، والكمية المطلوبة، وتكاليف النقل لخلايا هذا العمود تساوي صفراً.

سنبدأ الجدول الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي كما يلي:

From / To	1	2	3	5	D	Supply
1	10 400	20 200	22	20	0	600
2	15	18 100	16 200	24 100	0	400
3	18	22	20	25 100	0 100	200
Dem	400	300	200	200	100	1200

TC = 17900

$\bar{U}_{13} = 4, \bar{U}_{14} = -6, \bar{U}_{1D} = -1, \bar{U}_{22} = 7, \bar{U}_{2D} = 1, \bar{U}_{31} = 9, \bar{U}_{32} = 3, \bar{U}_{33} = 3$

حيث إن لدينا قيمة سالبة 6- = $\bar{U}_{14}$ ، فإننا لم نصل للحل الأمثل ولابد من عمل جدول ثان وننفذ في الخلية ١٤.

From / To	1	2	3	4	D	Sup
1	400 (10)	100 (20)	(22)	100 (20)	(0)	600
2	(15)	200 (18)	200 (16)	(24)	(0)	400
3	(18)	(22)	(20)	100 (25)	100 (0)	200
Dem	400	300	200	200	100	1200

TC = 17300

$\bar{U}_{13} = 4, \bar{U}_{1D} = 5, \bar{U}_{22} = 7, \bar{U}_{24} = 6, \bar{U}_{2D} = 7, \bar{U}_{31} = 3, \bar{U}_{32} = -3, \bar{U}_{33} = -3$

حيث 3- = $\bar{U}_{32}$ و3- = $\bar{U}_{33}$ ، فإننا لم نصل للحل الأمثل ولا بد من عمل جدول ثالث وننفذ في (٢ , ٣) أو (٣ , ٣). لنختار الخلية (٢ , ٣).

From / To	١	٢	٣	٤	D	Sup
1	400 (10)	(20)	(22)	200 (20)	(0)	600
2	(15)	200 (18)	200 (16)	(24)	(0)	400
3	(18)	100 (22)	(20)	0 (25)	100 (0)	200
Dem	400	300	200	200	100	1200

TC = 17000

$\bar{U}_{12} = 1, \bar{U}_{13} = 7, \bar{U}_{1D} = 5, \bar{U}_{21} = 4, \bar{U}_{24} = 3, \bar{U}_{2D} = 4, \bar{U}_{31} = 3, \bar{U}_{33} = 0$

وحيث إن جميع قيم $\bar{U}$ موجبة إلا واحدة تساوي الصفر، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، وهو حل متعدد (Multiple Optimal Solution). لاحظ كذلك أننا كنا في حالة تحلل مما استدعى إضافة صفر في واحدة من الخلايا الفارغة حتى نتمكن من حل المسألة.

المراجـــع

References

Ahmed M. M., Khan A.R., Sharif Uddin Md., Ahmed F.: A New Approach to Solve Transportation Problems, Open Journal of Optomization, Vol. 5 No. 1, March 4, 2016.

Daellenbach H.G., George J.A., McNickle D.C.: Introduction To Operations Research Techniques, 2nd ed., Allyn and Bacon, Inc., Newton, MA, USA, 1983.

Gould F.J., Eppen G.D., and Schmidt C.P.: Introductory Management Science, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991 .

Kalavathy S.: Operations Research, 2nd ed., Vikas Publishing House, New Delhi, India, 2002.

Render B., Stair R.M. Jr, and Hanna M.E.: Quantitative Analysis For Management, 8th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.

Wagner H.M.: Principles Of Operations Resarch – With Applications To Managerial decisions, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1989.

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

الفصل الثامن

مســــــألــة التخـصـيـص
The Assignment Problem

مسألة التخصيص أحد مواضيع بحوث العمليات والتي بدأت منذ مطلع القرن العشرين لكن العمل الذي قام به كلٌّ من عالمي الرياضيات الهنغاريين Denes Konig وEgervary Jeno كان الشرارة التي أشعلت تطوير العمل في هذا المجال، وفي العام ١٩٤٦م قام T.E. Easterfield بتطوير خوارزمية هذه المسألة، وفي العام ١٩٥١ أظهر George Dantzig إمكانية صياغة مسألة التخصيص باستخدام البرمجة الخطية للحصول على نتائج تعطي أعداداً صحيحة (غير كسرية) [Schrijver, 2005]. وتعني مسألة التخصيص بإيجاد التخصيص الأمثل لعدد n غير قابلة للقسمة من الموارد المتاحة لعدد n من المهام. كمثال على ذلك تخصيص مديري لفروع البنك، أو تخصيص أطباء مناوبين لأقسام المستشفى وغير ذلك. ومسألة التخصيص هي شكل من تطبيقات مسألة النقل (أو من تطبيقات البرمجة الخطية/ برمجة الأعداد الصحيحة الخطية) ولكنها تتصف بذلك [Rardin, 1998]:

- عدد مواقع الطلب يجب أن يساوي عدد مواقع العرض، أي أن n=m في هذه الحالة.
- الكمية المعروضة والكمية المطلوبة لكل المواقع تساوي ١ .
- تخصيص مورد واحد فقط لكل مهمة.
- قيمة Xij تساوي صفرًا أو واحدًا.

و تتكون مسألة التخصيص من العناصر التالية:

١ -مجموعة من الموارد (مواقع العرض) عددها n ، فالموقع i يخصص منه وحدة واحدة فقط.

٢-مجموعة من المهام (مواقع الطلب) عددها n ، فالموقع j يخصص له وحدة واحدة فقط.

٣-تكلفة تخصيص (نقل) الوحدة الواحدة من الموارد i إلى المهام j والتي تمثل بالرمز c_{ij}.

٤-عدد الوحدات المخصصة من الموارد i إلى المهام j والتي تمثل بالرمز x_{ij} حيث x_{ij} تساوي ١ أو صفر.

وعليه، فإن الشكل العام للصيغة الرياضية لهذه المسألة سيكون كالتالي:

$$\text{Min } w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1$$

لنأخذ المثال التالي (مسألة (١ ,٨) لإيضاح كيفية استخدام مسألة التخصيص:

يرغب مدرب منتخب المملكة العربية السعودية للسباحة والمشارك في الدورة الأولمبية اختيار فريق السباحة لديه في سباق التتابع، البيانات التالية في الجدول التالي تمثل الزمن المقطوع لكل سباح، ولكل نوع لكل ١٠٠ متر، والمطلوب اختيار الفريق الأمثل الذي يحقق أقل زمن إجمالي.

سباحة/ السباح	حرة	صدر	فراشة	ظهر
إبراهيم	51	64	53	57
محمد	51	67	54	56
خالد	50	63	56	60
عبدالله	53	64	57	57

لحل هذه المسألة، يمكن لنا تعريف المتغيرات، وكتابة الصيغة الرياضية كالتالي:

X_{ij}: السباح i والمخصص لنوع السباحة j (حيث i=1,2,3,4 و j=1,2,3,4)

$Min\ w = 51X_{11} + 64X_{12} + 53X_{13} + 57X_{14} + 51X_{21} + 67X_{22} + 54X_{23} + 56X_{24} + 50X_{31} + 63X_{32} + 56X_{33} + 60X_{34} + 53X_{41} + 64X_{42} + 57X_{43} + 57X_{44}$

Subject To

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$

$X_{ij} = 0$ or 1 (for i=1,2,3,4 and j=1,2,3,4)

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 223,0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_{11}	0.000000	1.000000
X_{12}	0.000000	2.000000
X_{13}	1.000000	0.000000
X_{14}	0.000000	2.000000
X_{21}	0.000000	0.000000
X_{22}	0.000000	4.000000
X_{23}	0.000000	0.000000
X_{24}	1.000000	0.000000
X_{31}	1.000000	0.000000
X_{32}	0.000000	1.000000
X_{33}	0.000000	3.000000
X_{34}	0.000000	5.000000
X_{41}	0.000000	1.000000
X_{42}	1.000000	0.000000
X_{43}	0.000000	2.000000
X_{44}	0.000000	0.000000

الشكل رقم (١ ,٨). يوضح حل مسألة (١ ,٨) باستخدام برنامج LINDO.

أظهر الحل الأمثل أن الزمن الكلي هو ٢٢٣ ثانية، بتخصيص إبراهيم لسباحة الفراشة،

ومحمد لسباحة الظهر، وخالد للسباحة الحرة، وعبدالله لسباحة الصدر، لكن هناك طريقة أخرى عملية من حيث السرعة لحل مسائل التخصيص، وهي الطريقة الهنغارية.

الطريقة الهنغارية Hungarian Method:

تم تطوير الطريقة الهنغارية في العام ١٩٥٥م عن طريق Harold Kuhn، وأخذت اسمها هذا نتيجة لأن الخوارزمية الخاصة بهذه المسألة هي نتيجة عمل قام به كل من عالمي الرياضيات الهنغاريين Denes Konig وEgervary Jeno [Schrijver, 2005]. وتقوم الطريقة الهنغارية على تخفيض مصفوفة التكاليف لمسألة التخصيص بجملة من العمليات الحسابية للوصول إلى خلايا ذات تكلفة تساوي الصفر يتم فيها التخصيص.

خطوات الطريقة الهنغارية لحالة التخفيض [Render et al., 2003]:

١-إيجاد مصفوفة تكاليف مخفضة من مصفوقة التكاليف الأساسية:

أ) صمم مصفوفة تكاليف جديدة، وذلك بطرح أقل تكلفة في كل صف (أ.ت.ص.) من جميع التكاليف في الصف.

ب) من مصفوفة التكاليف الجديدة، اختر أقل تكلفة من كل عمود (أ.ت.ع.)، واطرحها من جميع التكاليف في العمود لتُكون مصفوفة التكاليف المخفضة.

٢-ارسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة (أفقية أو عمودية أو كلاهما) شريطة تغطية جميع الأصفار في مصفوفة التكاليف المخفضة.

أ) إذا كان عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف (الأعمدة)، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.

ب) إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف (الأعمدة)، فاذهب للخطوة ٣.

٣-ابحث عن أصغر تكلفة غير مغطاة بالخطوط المستقيمة ولتكن k.

أ) اطرح التكلفة k من كل تكلفة غير مغطاة بالخطوط المستقيمة.

ب) أضف التكلفة k إلى كل التكاليف التي تقع على تقاطع خطين مستقيمين. عُد للخطوة ٢.

لحل المسألة (١ ,٨) سنقوم بالتالي:

الخطوة الأولى: إيجاد أقل زمن (تكلفة) في كل صف كما في الجدول رقم (١ , ٨) التالي:

جدول رقم (١ , ٨). إيجاد أقل زمن في كل صف.

سباحة/ السباح	حرة	صدر	فراشة	ظهر	أ.ت.ص.
إبراهيم	51	64	53	57	51
محمد	51	67	54	56	51
خالد	50	63	56	60	51
عبدالله	53	64	57	57	53

طرح أ.ت.ص. من جميع التكاليف لكل صف، وإيجاد أ.ت.ع. كما هو موضح في الجدول التالي (٢ , ٧):

جدول رقم (٢ , ٨). إيجاد أقل زمن في كل عمود.

سباحة/ السباح	حرة	صدر	فراشة	ظهر
إبراهيم	0	13	2	6
محمد	0	16	3	5
خالد	0	13	6	10
عبدالله	0	11	4	4
أ.ت.ع.	0	11	2	4

تكوّن لدينا الآن مصفوفة التكاليف المخفضة التالية كما في الجدول رقم (٣ , ٨):

جدول رقم (٨,٣). مصفوفة التكاليف المخفضة.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
2	0	2	0	إبراهيم
1	1	5	0	محمد
6	4	2	0	خالد
0	2	0	0	عبدالله

الخطوة الثانية: نرسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة لتغطية جميع الأصفار كما هو موضح في الجدول التالي (٨, ٤):

جدول رقم (٨, ٤). إيجاد أقل عدد من الخطوط المستقيمة.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
2	0	2	0	إبراهيم
1	1	5	0	محمد
6	4	2	0	خالد
0	2	0	0	عبدالله

حيث إن عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد الصفوف (الأعمدة)، فنذهب إلى الخطوة ٣.

الخطوة الثالثة: أقل تكلفة غير مغطاة تساوي ١، مما يعني أن k=1، وبطرح ١ من التكاليف غير المغطاة، وإضافتها إلى التكاليف التي تقع على تقاطع خطين مستقيمين نحصل على الجدول التالي (٨, ٥):

جدول رقم (٨, ٥). عمل الخطوة رقم ٣.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
2	0	2	1	إبراهيم
0	0	4	0	محمد
5	3	1	0	خالد
0	2	0	1	عبدالله

و بتطبيق الخطوة ٢ مرةً أخرى في الجدول رقم (٦ ,٨):

جدول رقم (٦ ,٨). تطبيق الخطوة رقم ٢ مرة أخرى.

سباحة/ السباح	حرة	صدر	فراشة	ظهر
إبراهيم	1	2	0	2
محمد	0	4	0	0
خالد	0	1	3	5
عبدالله	1	0	2	0

بما أن عدد الخطوط المستقيمة في الجدول رقم (٦ ,٨) يساوي عدد الصفوف، إذن وصلنا إلى الحل الأمثل، وذلك كالتالي:

حيث إن الصف الأول (إبراهيم) لا يوجد فيه إلا صفر واحد تحت عمود فراشة، فيخصص إبراهيم لسباحة الفراشة، وكذلك لأنه لا يوجد إلا صفر واحد تحت عمود حرة في الصف الثالث (خالد)، فنخصص خالد للسباحة الحرة. وحيث إنه يوجد في الصف الثاني (محمد) صفران، أحدهما تحت عمود حرة، ولأننا خصصنا خالد للسباحة الحرة، فيتم إلغاء هذا الصفر في الصف الثاني، ويبقى لدينا صفر واحد تحت عمود ظهر، وهنا نخصص محمد لسباحة الظهر. أخيراً لم يبق لدينا إلا عبدالله في الصف الرابع، ويوجد صفران أحدهما تحت عمود ظهر وقد خُصص لمحمد، والآخر تحت صدر ونخصصه لعبدالله. أما المجموع الكلي للزمن فهو:

مجموع الزمن = ٥٣ + ٥٠ + ٥٦ + ٦٤ = ٢٢٣ ثانية

خطوات الطريقة الهنغارية لحالة التعظيم:

لو كانت مسألة التخصيص تهتم بتعظيم الإيرادات مثلا بدلاً من تخفيض التكاليف، فيمكن حلها بطريقتين:

الأولى: بنفس طريقة تخفيض التكاليف، ولكن بضرب جميع الإيرادات في (1-) ، وحلها كأنها مسألة تخفيض تكاليف باستخدام الطريقة الهنغارية [Render et al., 2003].

الثانية: تحوير خطوات الطريقة الهنغارية كالتالي:

١-إيجاد مصفوفة إيرادات معظمة:

- صمم مصفوفة إيرادات جديدة، وذلك بطرح أكبر إيراد في كل صف (أ.إ.ص.) من جميع الإيرادات في الصف.
- من مصفوفة الإيرادات الجديدة، اختر أكبر إيراد من كل عمود (أ.إ.ع.)، واطرحها من جميع الإيرادات في العمود لتُكون مصفوفة الإيرادات المعظمة.

٢-ارسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة (أفقية أو عمودية أو كلاهما) لتغطية الأصفار في مصفوفة الإيرادات المعظمة.

- إذا كان عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف (الأعمدة)، فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.
- إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف (الأعمدة)، فاذهب للخطوة ٣.

٣-ابحث عن أكبر إيراد غير مغطى بالخطوط المستقيمة ولتكن k.

- اطرح الإيراد k من كل إيراد غير مغطى بالخطوط المستقيمة.
- أضف الإيراد k إلى كل الإيرادات التي تقع على تقاطع خطين مستقيمين. عُد للخطوة ٢.

الحل الأمثل للمسألة رقم (٨,١) لو كان الهدف معرفة أكبر زمن يمكن أن يستغرقه السباحون الأربعة في سباق التتابع، هو تخصيص إبراهيم للحرة، ومحمد للصدر، وخالد للظهر، وعبدالله للفراشة، والزمن الكلي ٢٣٥ ثانية. تحقق من ذلك.

التخصيص الممنوع:

لو كان لدينا تخصيص ممنوع مثل منع تخصيص إبراهيم لسباحة الفراشة والحرة، فيجب تعديل الزمن (التكاليف) في المصفوفة للمسألة رقم (٨,١) بوضع رقم كبير جداً موجب تحت عمودي حرة وفراشة بالنسبة لإبراهيم، ويمكن تمثيل هذا الرقم الكبير بالرمز M [Gould et al, 1991]. بعد ذلك يمكن لنا التعامل مع المسألة كما فعلنا سابقاً، والجدول التالي رقم (٨,٧)، يوضح طريقة الحل لهذه الحالة:

الجدول رقم (٨ ,٧). مصفوفة الزمن ويوجد تخصيص ممنوع.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
57	M	64	M	إبراهيم
56	54	67	51	محمد
60	56	63	51	خالد
57	57	64	53	عبدالله

الخطوة الأولى: إيجاد أقل زمن (تكلفة) في كل صف كما في الجدول رقم (٨ ,٨) التالي:

الجدول رقم (٨ ,٨). إيجاد أقل زمن في كل صف.

أ.ت.ص.	ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
57	57	M	64	M	إبراهيم
51	56	54	67	51	محمد
50	60	56	63	50	خالد
53	57	56	64	53	عبدالله

طرح أ.ت.ص. من جميع التكاليف لكل صف، وإيجاد أ.ت.ع. كما هو موضح في الجدول التالي رقم (٨ ,٩):

الجدول رقم (٨ ,٩). إيجاد أقل زمن في كل عمود.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
0	M-57	7	M-57	إبراهيم
5	3	16	0	محمد
10	6	13	0	خالد
4	4	11	0	عبدالله
0	3	7	0	أ.ت.ع.

تكوّن لدينا الآن مصفوفة التكاليف المخفضة التالية الجدول رقم (٨, ١٠):

الجدول رقم (٨, ١٠). مصفوفة التكاليف المخفضة.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
0	M-60	0	M-57	إبراهيم
5	0	9	0	محمد
10	3	6	0	خالد
4	1	4	0	عبدالله

الخطوة الثانية: نرسم أقل عدد من الخطوط المستقيمة لتغطية جميع الأصفار كما هو موضح في الجدول التالي رقم (٨, ١١):

الجدول رقم (٨, ١١). إيجاد أقل عدد من الخطوط المستقيمة.

ظهر	فراشة	صدر	حرة	سباحة/ السباح
0	M-60	0	M-60	إبراهيم
5	0	9	0	محمد
10	3	6	0	خالد
4	1	4	0	عبدالله

حيث إن عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد الصفوف (الأعمدة)، فنذهب إلى الخطوة ٣.

الخطوة الثالثة: أقل تكلفة غير مغطاة تساوي ٤، مما يعني أن k=4، وبطرح ٤ من التكاليف غير المغطاة، وإضافتها إلى التكاليف التي تقع عل تقاطع خطين مستقيمين نحصل على الجدول التالي رقم (٨, ١٢):

الجدول رقم (١٢ ,٨). عمل الخطوة رقم (٣).

سباحة/ السباح	حرة	صدر	فراشة	ظهر
إبراهيم	M-53	0	M-56	0
محمد	0	5	0	1
خالد	0	2	3	6
عبدالله	0	0	1	0

و بتطبيق الخطوة ٢ مرةً أخرى الجدول رقم (١٣ ,٨):

الجدول رقم (١٣ ,٨) تطبيق الخطوة رقم ٢ مرة أخرى.

سباحة/ السباح	حرة	صدر	فراشة	ظهر
إبراهيم	M-53	1	M-56	0
محمد	0	5	0	1
خالد	0	2	3	6
عبدالله	0	0	1	0

بما أن عدد الخطوط المستقيمة يساوي عدد الصفوف في الجدول رقم (١٣ ,٨)، إذاً وصلنا إلى الحل الأمثل، وذلك كالتالي:

حيث إن الصف الثالث (خالد) لا يوجد فيه إلا صفر واحد تحت عمود حرة، فيخصص خالد للسباحة الحرة. وحيث إنه يوجد في الصف الثاني (محمد) صفران، أحدهما تحت عمود حرة، ولأننا خصصنا خالد لسباحة الحرة، فيتم إلغاء هذا الصفر في الصف الثاني، ويبقى لدينا صفر واحد تحت عمود فراشة، وهنا نخصص محمد لسباحة الفراشة. في الصف الأول (إبراهيم)، والصف الأخير (عبدالله)، بقي لدينا صفران تحت عمود صدر، وعمود ظهر. في هذه الحالة يمكن أن نختار عشوائياً، فنخصص إبراهيم لسباحة الصدر، وعبدالله لسباحة الظهر. يلاحظ أنه لو خصصنا إبراهيم لسباحة الظهر، وعبدالله لسباحة الصدر، فإن الزمن الكلي أن يتغير (دالة الهدف)؛ لأن لدينا حل بديل. أما المجموع الكلي للزمن فهو:

مجموع الزمن = ٦٤ + ٥٤ + ٥٠ + ٥٧ = ٢٢٥ ثانية

يجب ملاحظة أنه لو كانت المسألة تعظيم، وكان لدينا حالة تخصيص ممنوع، فيجب أن نستبدل الرمز M بالرمز (M-)، حيث M- قيمة سالبة صغيرة جداً.

تماريـــــــن

السؤال الأول: أحد المصانع لديه أربع آلات سيتم تخصيصها لأربع مهام، كل آلة يمكن تخصيصها لأي مهمة، وكل مهمة يمكن أن تتم عبر آلة واحدة، فإذا كان زمن تجهـــيز الآلة (setup time) بالساعات لأي مهمة كما في الجدول التالي، فما هو التخصيص الأمثل لتخفيض زمن التجهيز الكلي؟

الآلة / المهمة	المهمة الأولى	المهمة الثانية	المهمة الثالثة	المهمة الرابعة
الأولى	13	4	7	6
الثانية	1	11	5	4
الثالثة	6	7	2	8
الرابعة	1	3	5	9

السؤال الثاني: إذا علمت أن الآلة الرابعة لا يمكن أن تنفذ المهمة الأولى للسؤال السابق، فما هو الحل الأمثل؟

السؤال الثالث: لدى إدارة المبيعات ثلاثة رجال بيع في ثلاثة فروع (الرياض، الدمام، جدة) وتريد تخصيصهم لثلاثة مدن (بريدة، أبها، تبوك)، يمثل الجدول التالي أسعار تذاكر الطيران بين المدن. ما هو التخصيص الأمثل لتخفيض تكلفة الطيران؟

من / إلى	بريدة	أبها	تبوك
الرياض	250	400	350
الدمام	400	600	350
جدة	200	400	350

السؤال الرابع: للسؤال السابق، ما هو التخصيص الأمثل لو كانت القيم داخل الجدول السابق تمثل العوائد المتوقعة؟

المراجـــع

References

Gould F.J., Eppen G.D., and Schmidt C.P.: Introductory Management Science, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991 .

Rardin R.L.: Optimization In Operations Research, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1998.

Render B., Stair R.M. Jr, and Hanna M.E.: Quantitative Analysis For Management, 8th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.

Schrijver A.: On the history of combinatorial Optimization (till 1960), in : Handbook of Discrete Optimization" (K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel, eds.), Elsevier, Amsterdam, pp. 1—68, 2005.

الفصل التاسع

برمجة الأعداد الصحيحة الخطية
Integer Linear Programming

برمجة الأعداد الصحيحة الخطية (ILP) هي أحد أنواع البرمجة الخطية (LP)، لكن مع التنازل عن فرضية الاستمرارية (Continuity)، أو القابلية للقسمة (Divisibility) [Gould et al, 1991]، وهذا ما يجعلها أكثر واقعية من البرمجة الخطية حيث إن المتغيرات في أغلب الأحيان تتطلب قيماً صحيحة وبدون كسور، لكن المشكلة في برمجة الأعداد الصحيحة أنها تأخذ وقتاً أطول في الحل، كما أن حل هذه المسائل نفسها أصعب، وخاصةً كلما ازداد عدد المتغيرات. قد يتبادر إلى الذهن فكرة تقريب النتائج إلى أقرب عدد صحيح عند استخدام البرمجة الخطية، وهذه الفكرة قد تجد القبول لدى الإدارة لو كانت المتغيرات تمثل عدد الكراسي أو الطاولات المنتجة فبدلاً من ٥٤١٦,٣٤ كرسيًّا مثلاً، يمكن أن ننتج ٥٤١٦ فقط. لكن الأمر تظهر أهميته بوضوح إذا كان الأمر يتعلق بمنتجات عالية التكلفة. مثال ذلك، قد ترغب الدولة في تشييد مطارات محلية ودولية في بعض مناطق البلاد، ولكن إنشاء ٦,٧٦ مطاراً محلياً، و٢,٤٣ مطاراً دولياً أمرُ غير مقبول، وهنا يجد متخذو القرار أنفسهم غير مقتنعين وغير مطمئنين بأن يتخذوا قراراً ببناء ٧ مطارات محلية، ومطارين دوليين بناء على قاعدة التقريب، وكذلك الحال قد يكون القرار ثنائي النتيجة مثل اتخاذ قرارٍ بإنشاء مستودعٍ في الرياض X=1 أو عدم إنشائه X=0 ؛ لأن الحل باستخدام البرمجة الخطية قد يعطي X=0.35، وهذه النتيجة لا تعني شيئاً لمتخذ القرار. إن تقريب النتيجة إلى X=0 أي عدم الإنشاء قد يكون قراراً سيئاً. عموماً تجد الإدارة نفسها في بعض الأحيان في حاجة إلى استخدام برمجة الأعداد الصحيحة الخطية لكن تظل البرمجة الخطية الأكثر استخداماً.

برمجة الأعداد الصحيحة الخطية (ILP): هي برمجة خطية تلتزم بجميع شروط البرمجة الخطية باستثناء أن بعض أو كل المتغيرات يجب أن تأخذ قيماً صحيحة.

أنواع برمجة الأعداد الصحيحة [Gould et al, 1991]:

١-برمجة الأعداد الصحيحة الخطية الخالصة Pure Integer Linear Programming: هي برمجة خطية تلتزم بجميع شروط البرمجة الخطية باستثناء أن كل المتغيرات يجب أن تأخذ قيماً صحيحة.

٢-برمجة الأعداد الصحيحة الخطية المختلطة Mixed Integer Linear Programming: هي برمجة خطية تلتزم بجميع شروط البرمجة الخطية باستثناء أن بعض المتغيرات يجب أن تأخذ قيماً صحيحة.

٣-برمجة الأعداد الصحيحة الخطية الثنائية (صفر-١) 0-1 Binary Integer Linear Programming: هي برمجة خطية يكون أحد المتغيرات فيها على الأقل يأخذ قيمتين فقط، وهما صفر أو واحد.

الأمثلة التالية توضح طرق صياغة مسائل برمجة الأعداد الصحيحة لكل نوع من الأنواع السابقة.

برمجة الأعداد الصحيحة الخالصة (PILP):

مسألة رقم (١ ,٩):

إحدى المؤسسات العاملة في التخليص الجمركي ترغب في التعاقد مع إحدى مؤسسات التدريب لتقديم دورات تدريبية في اللغة الإنجليزية، والحاسب الآلي لموظفيها في مكاتبها في كلٍ من الرياض، وجدة، والدمام. يبين الجدول التالي عدد الموظفين المرشحين للتدريب من جميع المكاتب، وتكلفة الدورة التدريبية لكل موظف:

	دورة اللغة الإنجليزية	دورة الحاسب الآلي
عدد الموظفين	50	60
تكلفة الموظف	4000	5000

فإذا كان عدد المتدربين في اللغة الإنجليزية لمكتب جدة، ومكتب الدمام يجب ألا يقل ٠,٤ لكلٍ منهما من مجموع متدربي اللغة الإنجليزية، وأن ٠,٥ على الأقل من متدربي الحاسب الآلي يجب أن يكونوا من موظفي الرياض. كما أن عدد متدربي اللغة الإنجليزية، والحاسب الآلي يجب ألا يقل عن ٦٠٪ من عدد الموظفين المرشحين لكل دورة. المطلوب كتابة الصيغة الرياضية المناسبة على شكل برنامج خطي للأعداد الصحيحة لتخفيض تكلفة التدريب.

لحل هذه المسألة نبدأ بتعريف المتغيرات كالتالي:

X_1: عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورة تدريبية في اللغة الإنجليزية لمكتب الرياض.

X_2: عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورة تدريبية في اللغة الإنجليزية لمكتب جدة.

X_3: عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورة تدريبية في اللغة الإنجليزية لمكتب الدمام.

Y_1: عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورة تدريبية في الحاسب الآلي لمكتب الرياض.

Y_2: عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورة تدريبية في الحاسب الآلي لمكتب جدة.

Y_3: عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورة تدريبية في الحاسب الآلي لمكتب الدمام.

دالة الهدف هي تخفيض تكلفة التدريب لجميع الموظفين:

$$\textbf{Min } w = 4000X_1 + 4000X_2 + 40000X_3 + 5000Y_1 + 5000Y_2 + 5000Y_3$$

القيدان الأول والثاني للمسألة: يخصان عدد الموظفين الذين سيحصلون فعلاً على الدورات التدريبية في اللغة الإنجليزية، والحاسب الآلي على التوالي على ألا يقل عن ٦٠٪ من عدد الموظفين المرشحين لكل دورة:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 30$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 36$$

القيدان الثالث والرابع: يخصان الشرط الخاص بنسبة الموظفين الذين سيحصلون على دورات تدريبية في اللغة الإنجليزية لمكتبي جدة، والدمام على التوالي:

$$X_2 \geq 0.4\ (X_1 + X_2 + X_3) \quad ===\rightarrow \quad 0.6X_2 - 0.4X_1 - 0.4X_3 \geq 0$$
$$X_3 \geq 0.4\ (X_1 + X_2 + X_3) \quad ===\rightarrow \quad 0.6X_3 - 0.4X_1 - 0.4X_2 \geq 0$$

القيد الخامس: يخص الشرط الخاص بنسبة الموظفين الذين سيحصلون على دورات تدريبية في الحاسب الآلي لمكتب الرياض:

$Y_1 \geq 0.5\ (Y_1 + Y_2 + Y_3) \quad ===\rightarrow \quad 0.5Y_1 - 0.5Y_2 - 0.5Y_3 \geq 0$

بقي القيد الأخير والخاص بعدم السلبية، وكذلك باشتراط أن عدد الموظفين الذين سيحصلون على دورات تدريبية يجب أن يكون عدداً صحيحاً:

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ and All Integers

إذاً الصياغة النهائية للمسألة ستكون كالتالي:

Min $w = 4000X_1 + 4000X_2 + 40000X_3 + 5000Y_1 + 5000Y_2 + 5000Y_3$
Subject To:
$X_1 + X_2 + X_3 \geq 30$
$Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 36$
$0.6X_2 - 0.4X_1 - 0.4X_3 \geq 0$
$0.6X_3 - 0.4X_1 - 0.4X_2 \geq 0$
$0.5Y_1 - 0.5Y_2 - 0.5Y_3 \geq 0$
$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ and All Integers

برمجة الأعداد الصحيحة الخطية المختلطة (MILP):

مسألة رقم (٢ , ٩):

مستثمر لديه مبلغ ٣,٠٠٠,٠٠٠ ريال يريد استثمارها في شراء بيوت صغيرة، وأراضٍ، وأسهم في إحدى الشركات، على أمل أن يستثمر في المشروع أو المشروعات التي ستزيد من رأسماله في نهاية العام عند البيع. فإذا علمنا العوائد والحدود القصوى من الاستثمار والموضحة في الجدول التالي، فما هي الصيغة الرياضية المناسبة لحل هذه المسألة.

المشروع	التكلفة للوحدة	العائد المتوقع في نهاية العام للوحدة	الحدود القصوى
البيوت الصغيرة	450000	50000	5
الأمتار من الأراضي	150	18	12000
الأسهم	200	25	10000

لأن الهدف هو الرغبة في زيادة رأسماله في نهاية العام، فإن هذا لن يتم إلا بتعظيم العوائد المتوقعة للمشاريع الاستثمارية. بالتالي يُعرَّف كل مشروع استثماري على أنه متغير مستقل.

لحل هذه المسألة نبدأ بتعريف المتغيرات كالتالي:

X_1: عدد البيوت الصغيرة المطلوب شراؤها.

X_2: عدد الأمتار من الأراضي المطلوب شراؤها.

X_3: عدد الأسهم المطلوب شراؤها.

حيث إن المتغير الأول والثالث لا يقبلان الكسور، فيجب أن نوضح ذلك في صياغتنا الرياضية على أساس أنهما متغيران يأخذان أعداداً صحيحة فقط، أما المتغير الثاني فيمكن أن يأخذ أي قيمة أكبر أو تساوي الصفر. دالة الهدف هنا هي تعظيم القيمة الحالية للعوائد المتوقعة، وعليه فإن دالة الهدف تساوي:

$$\text{Max } z = 50000X_1 + 18X_2 + 25X_3$$

أما القيود فستظهر كالتالي:

القيد الأول هو القيد الخاص بالاستثمار والمحدد بمبلغ ٣٠٠٠٠٠٠ ريال للاستثمار في واحدة أو أكثر من هذه المشاريع، فالمشروع الأول تكلفته $450000X_1$، والمشروع الثاني تكلفته $150X_2$، والمشروع الثالث تكلفته $200X_3$، ومجموع هذه التكاليف يجب ألا يزيد عن ٣٠٠٠٠٠٠ ريال.

$$450000X_1 + 150X_2 + 200X_3 \leq 3000000$$

القيد الثاني والثالث والرابع ستمثل الحد الأقصى للاستثمار في أيٍ من هذه المشاريع. فالمشروع الأول شراء بيوت صغيرة يجب ألا يتجاوز حجم الاستثمار فيه عن شراء ٥ بيوت، وكذلك بالنسبة للأراضي فيجب ألا يتجاوز عدد الأمتار من الأراضي المشتراة عن ١٢٠٠٠ متراً، وبالنسبة للأسهم فإن عدد الأسهم المشتراة يجب ألا يتجاوز ١٠٠٠٠ سهمٍ.

$$X_1 \leq 5$$
$$X_2 \leq 12000$$
$$X_3 \leq 10000$$

أخيراً قيد عدم السلبية وقيد الأعداد الصحيحة للمتغير الأول والثالث.

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_3 \text{ are Integers}$$

الصيغة النهائية لهذه المسألة ستظهر على الشكل التالي لبرمجة الأعداد الصحيحة المختلطة:

$$\text{Max } z = 50000X_1 + 18X_2 + 25X_3$$

Subject To:

$450000X_1 + 150X_2 + 200X_3 \leq 3000000$

$X_1 \leq 5$

$X_2 \leq 12000$

$X_3 \leq 10000$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

X_1, X_3 are Integers

برمجة الأعداد الصحيحة الخطية الثنائية (صفر-١) 0-1 BILP:

مسألة رقم (٣,٩):

شركة الأموال القابضة ترغب في الاستثمار في واحدة أو أكثر من ٤ مشاريع استثمارية معروضة عليها. يوضح الجدول التالي المشاريع الاستثمارية الأربعة، والقيمة الحالية للعائد المتوقع بعد ٥ سنوات لكل مشروع والتدفقات النقدية المطلوبة لكل مشروع والنقدية المتوفرة سنوياً لدى الشركة. فإذا أرادت الشركة البحث عن المشروع الاستثماري أو المشاريع الاستثمارية المثلى على أساس تعظيم القيمة الحالية للعوائد المتوقعة، فهل يمكن حل هذه المسألة باستخدام برمجة الأعداد الصحيحة الخطية ILP.

المشروع	العائد المتوقع بالآلاف	التدفقات النقدية بالآلاف في السنوات:				
		1	2	3	4	5
A	70	10	5	20	10	0
B	90	30	20	10	10	10
C	100	10	20	27	20	10
D	120	20	10	40	20	20
النقدية المتوفرة بالآلاف		50	45	70	40	30

نتيجةً لأن الهدف هو تعظيم العوائد المتوقعة للمشاريع الاستثمارية، فيمكن تعريف المتغيرات على أساس أن المتغير Xi يمثل المشروع الاستثماري i حيث (i=1,2,3,4)، وهذا المتغير Xi يأخذ القيم صفر أو ١. مثلاً إذا تم الاستثمار في المشروع الاستثماري الأول، فإن $X_1=1$، أما ذا لم يتم الاستثمار في المشروع الاستثماري الأول، فإن $X_1=0$.

دالة الهدف هنا هي تعظيم القيمة الحالية للعوائد المتوقعة، وعليه فإن دالة الهدف تساوي:

$$\text{Max } z = 70X_1 + 90X_2 + 100X_3 + 120X_4$$

أما القيود فتمثل التدفقات النقدية في كل سنة للمشاريع الأربعة والمقيدة بحد أقصى من النقدية المتوفرة سنوياً. القيد الأول مثلاً مقيد بمبلغ ٥٠٠٠٠ ريال يمكن صرفها في السنة الأولى للمشاريع الاستثمارية الأربعة، ويمكن صياغته كما يلي:

$$10X_1 + 30X_2 + 10X_3 + 20X_4 \leq 50$$

و بقية القيود الأخرى يمكن صياغتها بنفس الطريقة والتي تمثل بقية السنوات:

$$5X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 10X_4 \leq 45$$
$$20X_1 + 10X_2 + 27X_3 + 40X_4 \leq 70$$
$$10X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 40$$
$$10X_2 + 10X_3 + 20X_4 \leq 30$$

أخيراً ستكون الصيغة على شكل برمجة الأعداد الصحيحة الخطية للمسألة كالتالي:

Max z = 70X1 + 90X2 + 100X3 + 120X4

Subject To:

10X1 + 30X2 + 10X3 + 20X4 ≤ 50

5X1 + 20X2 + 20X3 + 10X4 ≤ 45

20X1 + 10X2 + 27X3 + 40X4 ≤ 70

10X1 + 10X2 + 20X3 + 20X4 ≤ 40

10X2 + 10X3 + 20X4 ≤ 30

X1, X2, X3, X4 = 0 or 1

الشروط المنطقية Logical Conditions:

تهدف المنطقية إلى استنباط نتيجة أو نتائج حقيقية بناء على نتيجة أو نتائج حقيقية أخرى. مثال ذلك:

الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، ومدينة جدة هي الميناء التجاري السعودي.

الاستنباط: الرياض، وجدة مدن سعودية.

أما الشروط المنطقية في المجال الرياضي، وفي برمجة الأعداد الصحيحة، فإنها تعني استخدام الأسلوب، أو المنطق الرياضي لاستنباط القيود، أو الشروط المطلوبة بناءً على المعلومات المتاحة، والتي لم يكن بالإمكان إيجادها بشكل مباشر [Bosch and Trick, 2005]. مثال ذلك شروط تُصاغ بشكل (إذا – وبالتالي IF – Then)، وكذلك شروط تُصاغ بشكل (إما – أو Either – Or) .

مثال (١ , ٩) (إذا – وبالتالي IF – Then) [Winston, 2004]:

إذا كان الشرط أنه إذا استثمرنا في العقار X فلا يمكن أن نستثمر في العقار Y فإن هذا يعني:

إذا كانت $X = 1$ فبالتالي $Y = 0$ ، والعكس صحيح، لكن يمكن ألا نستثمر في أي من العقارين، وبالتالي فيمكن أن تكون $X = 0$ و$Y = 0$، ويمكن كتابة هذه الصيغة بالشكل الرياضي التالي:

$$X + Y \leq 1$$
$$X = 0 \text{ or } 1,\ Y = 0 \text{ or } 1$$

مثال (٢ , ٩) (إما – أو Either – Or) [Winston, 2004]:

إذا كان الشرط أن نشتري من المنتج X أقل من ١٠ وحدات، أو نشتري أكثر من ٥٠ وحدة، والذي يعني أن:

$X \leq 10$ أو $X \geq 50$

فيمكن كتابة الصيغة بالشكل الرياضي التالي، حيث M رقم كبير جداً:

$$X \leq 10 + My$$
$$X \geq 50 - M(1-y)$$
$$X \geq 0\ ,\ y = 0 \text{ OR } 1$$

فإذا كانت $y = 0$ فإن $X \leq 10$ حيث:

$$X \leq 10$$
$$X \geq -M$$

و إذا كانت $y = 1$ فإن $X \geq 50$ حيث:

$$X \leq M$$
$$X \geq 50$$

المسائل التالية تمثل تطبيقات للشروط المنطقية في برمجة الأعداد الصحيحة الخطية:

مسألة رقم (٣ , ٩) برمجة الأعداد الصحيحة الخطية والشروط المنطقية:

بناءً على معلومات من إدارة التسويق لشركة الجوالات الأولى والتي تظهر أن مبيعات الشركة في منطقتي الرياض وجدة أقل من منافساتها فقد قررت الشركة تخصيص مبلغ ٢٠٠٠٠٠ ريال للدعاية لمنتجاتها في منطقتي الرياض، وجدة لمدة شهر ولثلاث فترات كحد أقصى باستخدام

صحيفة العاصمة الصادرة في الرياض، وصحيفة الميناء الصادرة في جدة. فإذا أظهرت دراسة إدارة التسويق الجدول التالي الذي يبين العدد المتوقع للأشخاص المُعرضين للإعلان في كل جريدة، وفي كل فترة حسب عدد الإعلانات (١٠ إعلانات في جريدة العاصمة يعني أن عدد الأشخاص المُعرضين للإعلان المتوقع = (٦ × ١٠٠٠٠) + (٤ × ١٢٠٠٠) = ١٠٨٠٠٠). بافتراض أن الإعلان الواحد في جريدة العاصمة يكلف ١٠٠٠٠ ريال، والإعلان الواحد في جريدة الميناء يكلف ٨٠٠٠ ريال ، وبافتراض أن المُعرضين للإعلان يقرأون جريدة مدينتهم فقط. المطلوب إيجاد الصيغة الرياضية المناسبة لحل هذه المسألة بهدف تعظيم عدد الأشخاص المُعرضين للإعلان.

جريدة العاصمة			جريدة الميناء		
الفترة	عدد الإعلانات	عدد الأشخاص للإعلان	الفترة	عدد الإعلانات	عدد الأشخاص للإعلان
الأولى	6	10000	الأولى	4	8000
الثانية	4	12000	الثانية	8	10000
الثالثة	5	13000	الثالثة	3	12000

$R_1 =$ { ١ إذا كان عدد الإعلانات لجريدة العاصمة يساوي ٦ إعلانات
صفر إذا كان غير ذلك

$R_2 =$ { ١ إذا كان عدد الإعلانات لجريدة العاصمة يساوي ١٠ إعلانات
صفر إذا كان غير ذلك

$R_3 =$ { ١ إذا كان عدد الإعلانات لجريدة العاصمة يساوي ١٥ إعلاناً
صفر إذا كان غير ذلك

$Q_1 =$ { ١ إذا كان عدد الإعلانات لجريدة الميناء يساوي ٤ إعلانات
صفر إذا كان غير ذلك

$Q_2 =$ { ١ إذا كان عدد الإعلانات لجريدة الميناء يساوي ١٢ إعلاناً
صفر إذا كان غير ذلك

$Q_3 =$ { ١ إذا كان عدد الإعلانات لجريدة الميناء يساوي ١٥ إعلاناً
صفر إذا كان غير ذلك.

لحل هذه المسألة نبدأ بتعريف المتغيرات كالتالي:

X_1: عدد الإعلانات لجريدة العاصمة ٦ إعلانات للفترة الأولى.

X_2: عدد الإعلانات لجريدة العاصمة ٤ إعلانات للفترة الثانية.

X_3: عدد الإعلانات لجريدة العاصمة ٥ إعلانات للفترة الثالثة.

Y_1: عدد الإعلانات لجريدة الميناء ٤ إعلانات للفترة الأولى.

Y_2: عدد الإعلانات لجريدة الميناء ٨ إعلانات للفترة الثانية.

Y_3: عدد الإعلانات لجريدة الميناء ٣ إعلانات للفترة الثالثة.

دالة الهدف هي تعظيم عدد الأشخاص المتعرضين للإعلان:

$$\text{Max } z = 10000X_1 + 12000X_2 + 13000X_3 + 8000Y_1 + 10000Y_2 + 12000Y_3$$

القيد الأول للمسألة يخص المبلغ المخصص للإعلان وهو ١٥٠٠٠٠، ويجب ألا يتجاوز هذا المبلغ:

$$10000X_1 + 10000X_2 + 10000X_3 + 8000Y_1 + 8000Y_2 + 8000Y_3 \leq 200000$$

باقي القيود ستمثل الحد الأقصى من الإعلانات لكل فئة والشروط المنطقية:

لجريدة العاصمة: إذا كان سيتم عمل ٦ إعلانات فيجب أن تكون $R_1=1$ و$R_2=R_3=0$ ، أو أنه سيتم عمل ١٠ إعلانات، ولذلك فإن $R_2=R_1=1$ و$R_3=0$ ، أو أنه سيتم عمل ١٥ إعلاناً، ولذلك فإن $R_3=R_2=R_1=1$، أو لا يتم الإعلان في جريدة العاصمة بتاتاً، وعليه فإن $R_1=R_2=R_3=0$. إن إضافة المتغيرات R_1, R_2, R_3 ساعدت في عمل ما يسمى الشروط المنطقية، وفي مسألتنا هذه؛ وذلك لأن قيم هذه المتغيرات هي قيم ثنائية تساوي صفراً أو واحداً فقط.

لجريدة الميناء: تم عمل نفس الطريقة السابقة، ولكن باستخدام المتغيرات Q_1, Q_2, Q_3.

$X_1 = 6R_1$

$X_2 = 4R_2$

$X_3 = 5R_3$

$R_2 - R_1 \leq 0$

$R_3 - R_2 \leq 0$

$Y_1 = 4Q_1$

$Y_2 = 8Q_2$

$Y_3 = 3Q_3$

$Q_2 - Q_1 \leq 0$

$Q_3 - Q_2 \leq 0$

بقي القيد الأخير والخاص بعدم السلبية، وكذلك باشتراط أن عدد الإعلانات يجب أن يكون عدداً صحيحاً:

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ and All Integers, $R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3 = 0$ or 1

إذاً الصياغة النهائية للمسألة ستكون كالتالي:

$$\text{Max } z = 10000X_1 + 12000X_2 + 13000X_3 + 8000Y_1 + 10000Y_2 + 12000Y_3$$

Subject To:

$$10000X_1 + 10000X_2 + 10000X_3 + 8000Y_1 + 8000Y_2 + 8000Y_3 \leq 200000$$
$$X_1 = 6R_1$$
$$X_2 = 4R_2$$
$$X_3 = 5R_3$$
$$R_2 - R_1 \leq 0$$
$$R_3 - R_2 \leq 0$$
$$Y_1 = 4Q_1$$
$$Y_2 = 8Q_2$$
$$Y_3 = 3Q_3$$
$$Q_2 - Q_1 \leq 0$$
$$Q_3 - Q_2 \leq 0$$

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ and All Integers, $R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3 = 0$ or 1

مسألة (٤ , ٩). لبرمجة الأعداد الصحيحة الخطية والشروط المنطقية [Winston 2004]:

نتيجة لرغبة الجهاز الإداري والفني للفريق الوطني الفوز في المباراة القادمة ليضمنوا التأهل إلى نهائيات كأس العالم، فقد قام مدرب الفريق بتصنيف لاعبي الوسط والهجوم حسب قدراتهم في التسديد، المهارة الفردية، السرعة، التركيز في الملعب على أساس أن يختار منهم ستة فقط، يبدأ بهم المباراة، بالإضافة إلى رباعي الدفاع، وحارس المرمى الذين أُختيروا سابقاً. يوضح الجدول التالي المراكز التي يجيدها اللاعبون وقدراتهم (١ ضعيف إلى ٣ ممتاز):

ويرغب المدرب بالالتزام بالشروط التالية عند اختياره للاعبين الستة الذين سيبدأ بهم:

- أربعة من اللاعبين يجب أن تكون لديهم القدرة على اللعب في الوسط، اثنين لديهم القدرة على اللعب كصانعي لعب، واثنين كمهاجمين.
- يجب أن يكون متوسط التسديد، ومتوسط المهارة، ومتوسط السرعة للاعبين المختارين ٢ على الأقل.

- إذا لعب اللاعب رقم ١، فيجب ألا يلعب اللاعب رقم ٥.
- إذا لعب اللاعب رقم ٢، فيجب أن يلعب اللاعب رقم ٧ واللاعب رقم ٨.
- يجب أن يبدأ اللعب باللاعب رقم ٢ أو اللاعب رقم ٦.

اللاعب	المركز	التسديد	المهارة	السرعة	التركيز
1	وسط	1	2	2	3
2	وسط - صانع	2	3	1	3
3	وسط – مهاجم	2	2	2	1
4	مهاجم	2	3	1	2
5	مهاجم	3	2	3	2
6	وسط - صانع	3	2	1	3
7	وسط – مهاجم	2	3	2	2
8	وسط – مهاجم	2	2	3	1
9	مهاجم - صانع	22	3	2	2

ما هي الصيغة الرياضية المناسبة لحل هذه المسالة إذا علمت أن المدرب يرغب بتعظيم القدرة على التركيز لدى اللاعبين الستة الذين سيبدأ بهم؟

لحل هذه المسألة نبدأ بتعريف المتغيرات كالتالي:

المتغيرات لدينا هم اللاعبون التسعة، لكن بمعلومية أن اللاعب، إما سيتم اختياره، وبذلك سيأخذ القيمة ١ ، وإما لا يتم اختياره، وعليه يأخذ القيمة ٠.

X_i: اللاعب رقم i حيث (i=1,2,..,9)

$X_i = 1$ إذا كان اللاعب i سيبدأ

$X_i = 0$ إذا كان اللاعب i لن يبدأ

دالة الهدف هي تعظيم القدرة على التركيز لدى اللاعبين المختارين من مجموع اللاعبين التسعة:

$$\text{Max } z = 3X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 3X_6 + 2X_7 + X_8 + 2X_9$$

القيد الأول يخص الحد الأدنى من لاعبي الوسط الذين سيبدأ بهم المباراة، وحيث إنه ليس كل اللاعبين يجيدون اللعب في هذا المركز، فسنفاضل في هذا القيد بين اللاعبين القادرين على اللعب في الوسط:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 4$

كما فعلنا في القيد الأول نفعل في القيد الثاني والثالث بخصوص الحد الأدنى لصانعي اللعب في القيد الثاني والحد الأدنى للمهاجمين في القيد الثالث:

$X_2 + X_6 + X_9 \geq 2$
$X_3 + X_4 + X_5 + X_7 + X_8 + X_9 \geq 2$

القيد الرابع يخص متوسط الأداء (الوسط الحسابي) للاعبين المختارين بالنسبة للتسديد الذي يجب ألا يقل عن ٢ ، ويجب أن نلاحظ هنا أن اللاعبين غير المختارين ستكون قيمهم صفر عند الحل الأمثل مما لن يؤثر على شرط أن متوسط الأداء للاعبين المختارين لن يقل عن ٢، لكن لأن عدد اللاعبين المختارين يساوي ٦ فإن مجموع القيم للوسط الحسابي سيكون ($6\times2=12$)، ولهذا سيظهر القيد بالشكل التالي:

$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 3X_5 + 3X_6 + 2X_7 + 2X_8 + 2X_9 \geq 12$

القيد الخامس والقيد السادس يخصان الحد الأدنى لمتوسط الأداء بالنسبة للمهارة والتركيز وسينطبق عليهما ما فعلنا في القيد السابق:

$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 3X_7 + 2X_8 + 3X_9 \geq 12$
$2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 3X_5 + X_6 + 2X_7 + 3X_8 + 2X_9 \geq 12$

القيد السابع يخص شرط عدم اجتماع اللاعب رقم ١ واللاعب رقم ٥ في الملعب في الوقت نفسه، وهذا من الشروط المنطقية (Logical Conditions) التي يجب الانتباه لها عند تطبيقها. لتطبيق هذا الشرط يجب ألا تكون قيمة $X_1=1$ و$X_5=1$ في الوقت نفسه والقيد التالي يستوفي هذا الشرط:

$X_1 + X_5 \leq 1$

فإذا كان $X_1=1$ فإن $X_5=0$ حيث إن مجموعهما يجب ألا يزيد عن ١. أما إذا كان $X_1=0$ فإن $X_5=1$ أو $X_5=0$ حيث إن مجموعهما يجب ألا يزيد عن ١ كذلك.

القيد الثامن والتاسع يخصان وجود اللاعبين رقم ٧ و٨ ضمن الستة الذين سيبدأ بهم إذا بدأ اللعب باللاعب رقم ٢. هذا الشرط يعني إذا كان $X_2=1$ ، فيجب أن يكون $X_7=1$ و$X_8=1$، لكن إذا كان $X_2=0$ ، فيمكن أن يكون $X_7=0$ أو $X_7=1$ وكذلك $X_8=0$ أو $X_8=1$ ؛ وذلك لأنه يمكن البدء باللاعبين رقم ٧ ورقم ٨ أحدهما أو كلاهما أو بدونهما بدون البدء باللاعب رقم ٢. يمكن التعبير عن هذا الشرط بالقيدين التاليين:

(٨).. $X_2 \leq (1 - y)$

(٩)...................................... $2 - X_7 - X_8 \leq 2y$

المجهول y سيأخذ قيمة ثنائية كذلك صفر أو ١، وعليه فالقيد (8) يعني أنه إذا كانت $X_2=1$ فإن $y=0$

و هذا يؤدي إلى أن القيد (9) سيؤكد أن $X_7=X_8=1$ ؛ لأن الطرف الأيمن في المتراجحة (9) تساوي الصفر في هذه الحالة لأن $y=0$. أما إذا كانت $X_2=0$ فإن $y=1$ في القيد (8)، مما يؤدي إلى أن X_7 وX_8 يمكن أن يأخذان أي قيمة سواءً صفر أو ١ في القيد (9).

كما يمكن أن نكتب هذا القيد كالتالي:

$$2X2 - X7 - X8 \leq 0$$

القيد العاشر يخص حالة اشتراط البدء باللاعب رقم ٢ أو اللاعب رقم ٦ ، وهذا يعني أنه يمكن بدء اللعب باللاعبين مجتمعين لكن لا يمكن تركهما جميعاً خارج الملعب عند البدء. يستوفي القيد التالي الالتزام بهذا الشرط:

$$X_2 + X_6 \geq 1$$

فإذا كان $X_2=1$ فإن X_6 يمكن أن يساوي صفر ويمكن أن يساوي ١. أما إذا كان $X_2=0$ ، فإن X_6 يجب أن يساوي ١ ، وهذا ما يحقق الشرط.

القيد الحادي عشر يخص شرط أن عدد اللاعبين الذين سيتم اختيارهم يجب أن يساوي ٦، وذلك كما يلي:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 = 6$$

أخيراً قيد أن جميع المتغيرات تأخذ قيماً ثنائية صفر أو ١:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, y = 0\text{-}1$$

إذاً الصياغة النهائية للمسألة ستكون كالتالي:

$$\text{Max } z = 3X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 3X_6 + 2X_7 + X_8 + 2X_9$$

Subject To:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 4$$

$$X_2 + X_6 + X_9 \geq 2$$

$$X_3 + X_4 + X_5 + X_7 + X_8 + X_9 \geq 2$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 3X_5 + 3X_6 + 2X_7 + 2X_8 + 2X_9 \geq 12$$

$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 3X_7 + 2X_8 + 3X_9 \geq 12$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 3X_5 + X_6 + 2X_7 + 3X_8 + 2X_9 \geq 12$$

$X_1 + X_5 \leq 1$

$X_2 \leq (1 - y)$

$2 - X_7 - X_8 \leq 2y$

$X_2 + X_6 \geq 1$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 = 6$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, y = 0 \text{ or } 1$

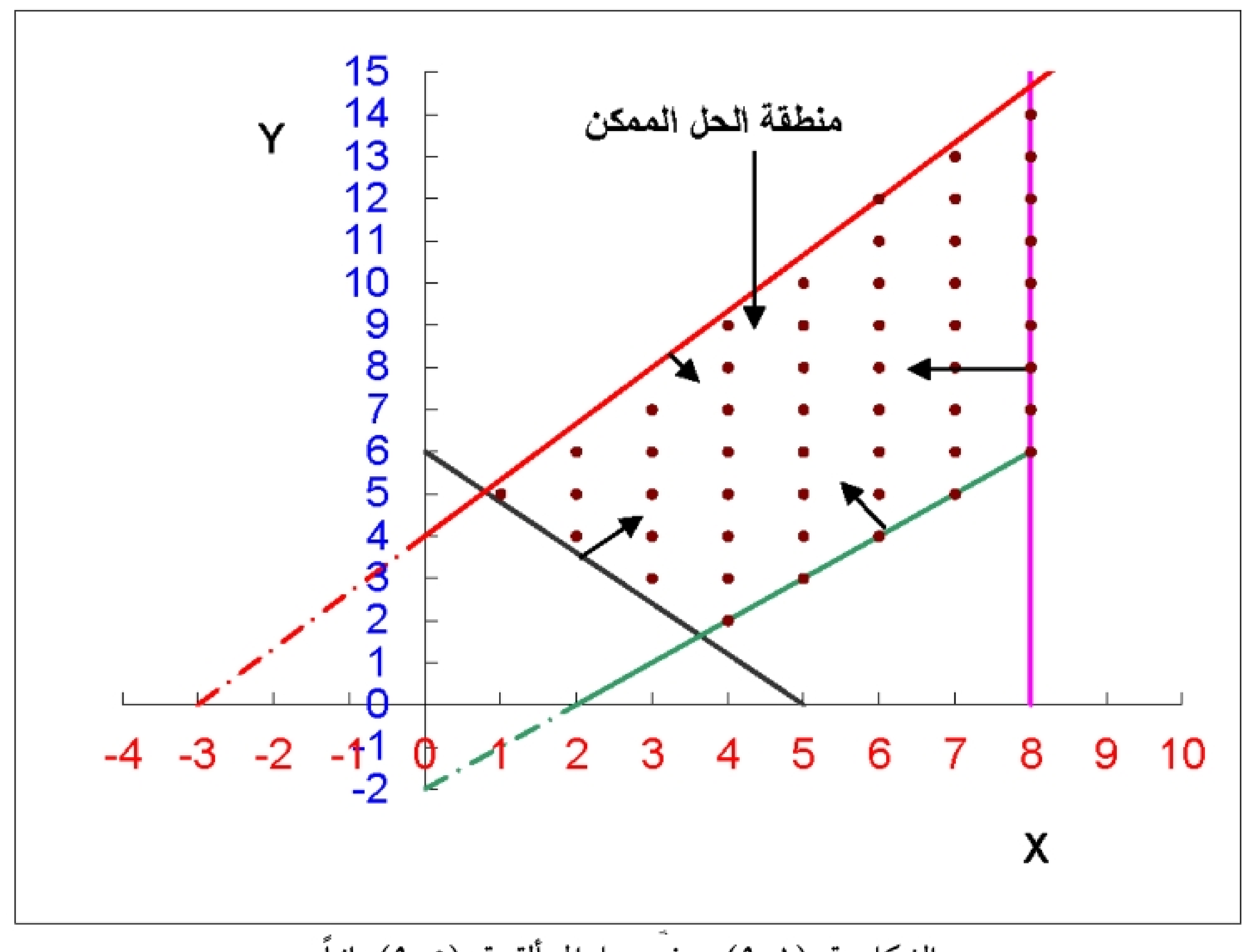
الحل البياني لمسائل برمجة الأعداد الصحيحة

سنبدأ بطريقة حل مسائل برمجة الأعداد الصحيحة الخطية بيانياً كما في المسألة رقم (٥ , ٩) التالية:

$$\text{Min } w = 40X + 20Y$$

S.T.

$$6X + 5Y \geq 30$$
$$2X \leq 16$$
$$3X - 3Y \leq 6$$
$$8X - 6Y \geq -24$$
$$X \geq 0 \text{ and Integer, } Y \geq 0 \text{ and Integer}$$



الشكل رقم (١ , ٩). يوضح حل المسألة رقم (٥ , ٩) بيانياً.

عند حل هذه المسألة باستخدام البرمجة الخطية (أي تجاهل شرط الأعداد الصحيحة للمتغيرات)، فإن الحل الأمثل يكون عندما تكون X = 0.79 وY = 5.05 ومن ثم Z = 132.63. الآن إذا أردنا حل هذه المسألة بإضافة شرط الأعداد الصحيحة للمتغيرات، فإن أسرع طريقة لحل هذه المسألة هو باستخدام طريقة ميل واتجاه مستقيم دالة الهدف، وفي مسألتنا هذه فإن اتجاه مستقيم دالة الهدف باتجاه جنوب غرب حيث إننا نحرص على تصغير X وY؛ لأن معامليهما في دالة الهدف موجبان والمسألة في حالة Min ، وبذلك فإن أفضل نقطة في هذا الاتجاه تعطي أعداداً صحيحة للمتغيرين هي عندما تكون X=1 وY=5. أما إذا أردنا استخدام طريقة تقييم النقاط الركنية فقد لا نجد أعداداً صحيحة، وهنا نحتاج إلى تقييم النقاط القريبة من حدود منطقة الحلول الممكنة، وفي اتجاه مستقيم دالة الهدف. لكن عملية تقييم جميع النقاط أمرٌ مجهد وغير عملي في الوقت ذاته، ولذلك لا بد من إيجاد طريقة أسهل وأسرع للحصول على الحل الأمثل. وهذه الطريقة تقوم على النظر إلى معاملات المتغيرات وإشاراتها في دالة الهدف، وحيث إن دالة الهدف لمسألتنا هذه هي التصغير، وأن معاملي X وY في دالة الهدف موجبان، فإن أفضل النقاط هي النقاط القصوى التي تصغر فيها قيمة المتغيرين. انظر مثلاً لو أخذنا جميع النقاط التي يكون فيها المتغير X عدداً صحيحاً، وفي اتجاه مستقيم دالة الهدف، ثم أخذنا النقاط القصوى فقط ذات الأعداد الصحيحة الصغرى للمتغير Y التي تقابل نقاط المتغير X في منطقة الحلول الممكنة، وبمقارنة قيم Z فيمكن لنا الوصول إلى الحل الأمثل بشكل أسرع. بتطبيق هذه الطريقة نجد أن الحل الأمثل لهذه المسألة عندما تكون X = 1 وY = 5 ، ومن ثم Z = 140 كما هو واضح في الجدول رقم (١ ,٩). لاحظ أن قيمة دالة الهدف باستخدام برمجة الأعداد الصحيحة أسوأ من قيمة دالة الهدف باستخدام البرمجة الخطية، وهذا أمرٌ متوقع بسبب إضافتنا لقيد جديد لمسألة البرمجة الخطية، وهو أن تكون قيم المتغيرين X وY أعداداً صحيحة لكن من المستحيل أن تكون أفضل منها. كما يجب أن نبين أنه أحياناً تكون قيمة دالة الهدف في برمجة الأعداد الصحيحة تساوي قيمة دالة الهدف في البرمجة الخطية، وذلك حينما تكون قيم المتغيرات في البرمجة الخطية عند الحل الأمثل أعداداً صحيحة. انظر قاعدة رقم (١ ,٩).

جدول رقم (١ ,٩). يوضح قيم النقاط القصوى التي تصغر فيها قيمة المتغيرين.

الحل الأمثل	Z	Y	X
نعم	140	5	1
لا	160	4	2
لا	180	3	3
لا	200	2	4

قاعدة رقم (١ , ٩) [Winston, 2004]:

حالة Max:

قيمة دالة الهدف في البرمجة الخطية أكبر من أو تساوي قيمة دالة الهدف في برمجة الأعداد الصحيحة الخطية.

Z-value in LP ≥ Z-value in ILP

حالة Min:

قيمة دالة الهدف في البرمجة الخطية أصغر من أو تساوي قيمة دالة الهدف في برمجة الأعداد الصحيحة الخطية.

Z-value in LP ≤ Z-value in ILP

طريقة الحد والفرع Branch & Bound Algorithm:

إن الطريقة المثالية لحل مسائل برمجة الأعداد الصحيحة الخطية هي باستخدام طريقة الحد والفرع، والتي بدأ تطبيقها Land & Doig [Land & Doig, 1960] ، وتقوم على أساس التفريع والاختبار، وذلك بعمل فروع للمسألة (Subproblem)، وتكون هذه الفروع نشطة (Active) إذا كان يمكن عمل فروع أخرى منها، وغير نشطة (Inactive) إذا لم نستطع عمل فروع أخرى منها. وتكون الفروع غير نشطة إذا:

١-وصلنا لحل أمثل وتحقق شرط الأعداد الصحيحة.

٢-وصلنا لحل أمثل ولم يتحقق شرط الأعداد الصحيحة لكن قيمة دالة الهدف أسوأ من حل آخر أعطى أعداداً صحيحة.

٣-إذا كانت نتيجة الفرع أن المسألة غير ممكنة الحل.

و لتطبيق طريقة الحد والفرع تتبع الخطوات التالية:

١-حل المسألة باستخدام البرمجة الخطية، وتعدُّ قيمة دالة الهدف هي الحد الأعلى في حالة Max (Upper Bound) والحد الأدنى في حالة Min (Lower Bound)،

أ) فإذا كان الحل الأمثل يعطي أعداداً صحيحة لقيم المتغيرات، فقد وصلنا للحل الأمثل لبرمجة الأعداد الحيحة الخطية ونتوقف هنا.

ب) إذا كان الحل لا يعطي أعداداً صحيحة للمتغيرات التي يجب أن تأخذ أعداداً صحيحة فنقوم بعمل مسألتين فرعيتين (Subproblems)، عن طريق تفريع المتغير الذي لم يأخذ عدداً صحيحاً، وذلك بأن يكون أصغر من أو يساوي أول عدد صحيح أصغر من القيمة الحالية

في المسألة الفرعية الأولى وبأن يكون أكبر من أو يساوي أول عدد صحيح أكبر من القيمة الحالية في المسألة الفرعية الثانية.

٢-يتم اختبار المسألتين الفرعيتين، وتكون لدينا الحالات التالية:

أ) وصلنا إلى حل أمثل وتحقق شرط الأعداد الصحيحة فنتوقف ولا نقوم بتفريع آخر لهذا الفرع، ويكون هذا الحل مرشحاً ليكون الحل الأمثل. (فرع غير نشط)

ب) وصلنا إلى الحل الأمثل، ولكن لم يتحقق شرط الأعداد الصحيحة، وكانت قيمة دالة الهدف أكبر من أي حل آخر في حالة Max (أو أصغر من أي حل آخر في حالة Min) لأي فرع أعطى أعداداً صحيحة، فنستمر ونقوم بعمل مسألتين فرعيتين كما في ١.ب، ولكن بإضافة قيد التفريع السابق. (فرع نشط)

ج) وصلنا إلى حل أمثل ولكن لم يتحقق شرط الأعداد الصحيحة، وكانت قيمة دالة الهدف لهذا الحل أصغر من أي حل آخر في حالة Max (أو أكبر من أي حل آخر في حالة Min) لأي فرع أعطى أعداداً صحيحة فنتوقف، ولا نقوم بتفريع آخر لهذا الفرع. (فرع غير نشط)

د) المسألة غير ممكنة الحل فنتوقف، ولا نقوم بتفريع آخر لهذا الفرع. (فرع غير نشط)

٣-إذا لم يكن بالإمكان عمل أي تفريع لأي فرع (جميع الفروع غير نشطة) فنتوقف ونقارن بين قيم دالة الهدف للفروع التي حصلنا فيها على أعداد صحيحة للمتغيرات، ويكون الحل الأمثل هو أكبرها في حالة Max ، وأصغرها في حالة Min.

المسألة التالية (٦ , ٩) توضح كيفية تطبيق طريقة الحد والفرع.

المسألة رقم (٦ , ٩). أوجد الحل الأمثل للصيغة الرياضية التالية باستخدام طريقة الحد والفرع:

$\text{Max } z = 8X + 5Y$

S.T.

$2X + 3Y \leq 16$

$4X + 5Y \geq 10$

$3X - 3Y \leq 6$

$8X - 6Y \geq -24$

$X \geq 0$ and Integer, $Y \geq 0$ and Integer

باستخدام البرمجة الخطية وبتجاهل شرط أو قيد الأعداد الصحيحة، فإن الحل الأمثل للمسألة رقم (٦ ,٩) ممثل بالنقطة A ، وفيها قيمة X=4.4, Y=2.4, Z=47.2 كما هو مبين في الشكل رقم (٢ ,٩). وحيث إن قيمة كلا المتغيرين X وY أعداد غير صحيحة، مما يخالف شرط الأعداد الصحيحة فسنبدأ بعمل مسألتين فرعيتين كما في ١.ب:

المسألة الفرعية الأولى: هي نفس المسألة رقم (٦ ,٩) ، ولكن بعد إلغاء قيد الأعداد الصحيحة، وبإضافة القيد التالي X≥5. عند حل هذه المسألة الجديدة سنحصل على حل غير ممكن وبذلك تكون المسألة الفرعية الأولى غير نشطة، فنتوقف ولا نعمل أي تفريع جديد. حالة ٢.د.

المسألة الفرعية الثانية: هي نفس المسألة رقم (٦ ,٩)، ولكن بعد إلغاء قيد الأعداد الصحيحة، وبإضافة القيد التالي X≤4. عند حل هذه المسألة الجديدة سنحصل على X=4, Y=2.667, Z=45.33 ، وحيث إن الحل الأمثل لا يعطي أعداداً صحيحة لجميع المتغيرات، وحيث إن المسألة الفرعية الأولى لم تعط حلاً أمثلاً للأعداد الصحيحة فتظل المسألة الفرعية الثانية نشطة، ويمكن عمل تفريع جديد منها للمتغير Y. حالة ٢.ب.

المسألة الفرعية الثالثة: هي نفس المسألة الفرعية الثانية، وبإضافة القيد التالي (Y≥3). عند حل هذه المسألة الجديدة سنحصل على X=3.5, Y=3, Z=43 ، وحيث إن الحل الأمثل لا يعطي أعداداً صحيحة لجميع المتغيرات، وحيث إن المسائل الفرعية السابقة لم تعط حلاً أمثلاً للأعداد الصحيحة، فتظل المسألة الفرعية الثالثة نشطة، ويمكن عمل تفريع جديد منها للمتغير X.

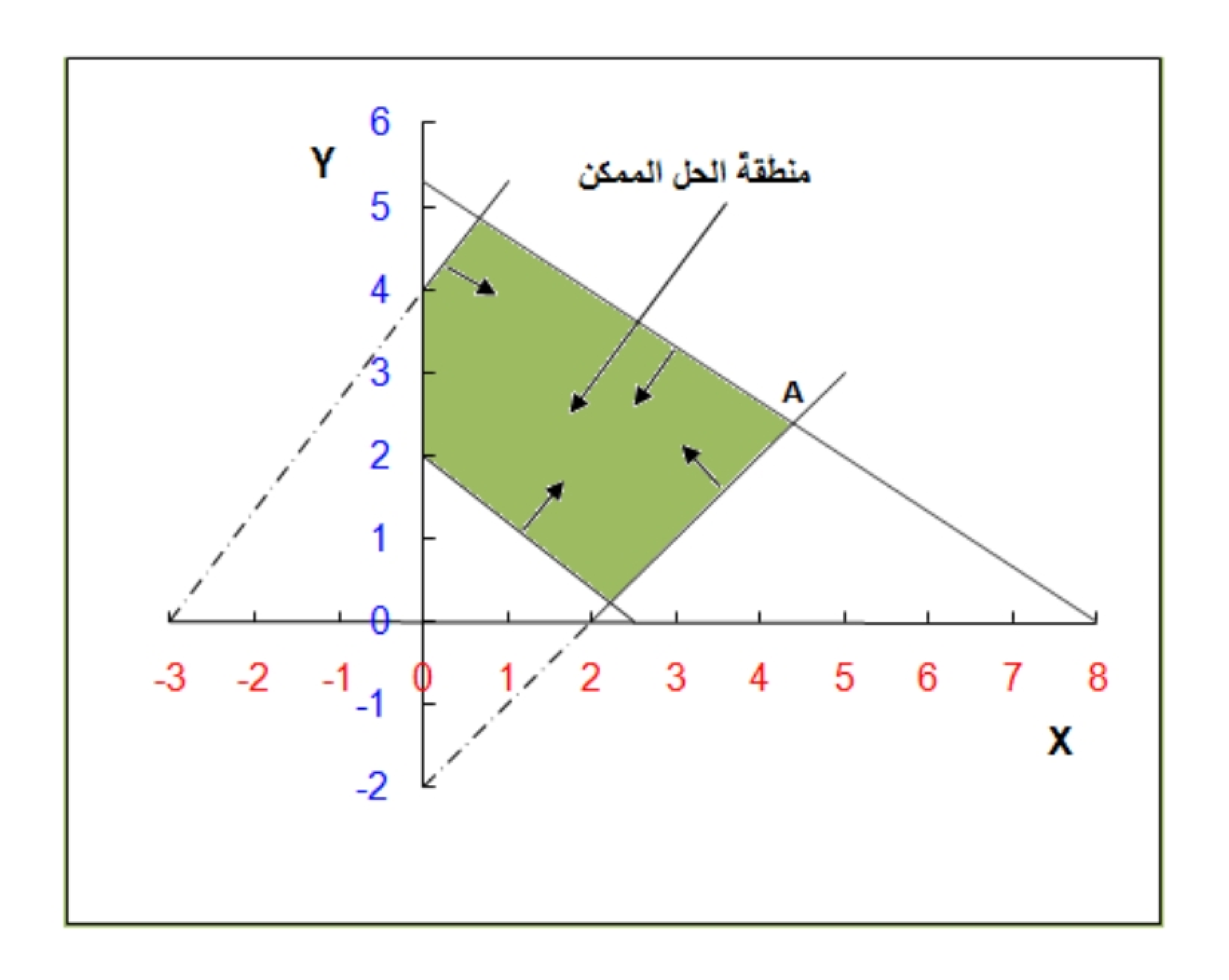
المسألة الفرعية الرابعة: هي نفس المسألة الفرعية الثانية، وبإضافة القيد التالي (Y≤2). عند حل هذه المسألة الجديدة سنحصل على X=4, Y=2, Z=42 ، وحيث إن الحل الأمثل يعطي أعداداً صحيحة لجميع المتغيرات، وحيث إن المسائل الفرعية السابقة لم تعط حلاً أمثلاً للأعداد الصحيحة فنتوقف هنا وتكون المسألة الفرعية الرابعة غير نشطة، ولكن مرشحة لتكون الحل الأمثل للمسألة رقم (٦ ,٩)، حالة ٢.أ.

المسألة الفرعية الخامسة: هي نفس المسألة الفرعية الثالثة، وبإضافة القيد التالي (X≥4). عند حل هذه المسألة الجديدة سنحصل على حل غير ممكن وبذلك تكون المسألة الفرعية الخامسة غير نشطة، فنتوقف ولا نعمل أي تفريع جديد. حالة ٢.د.

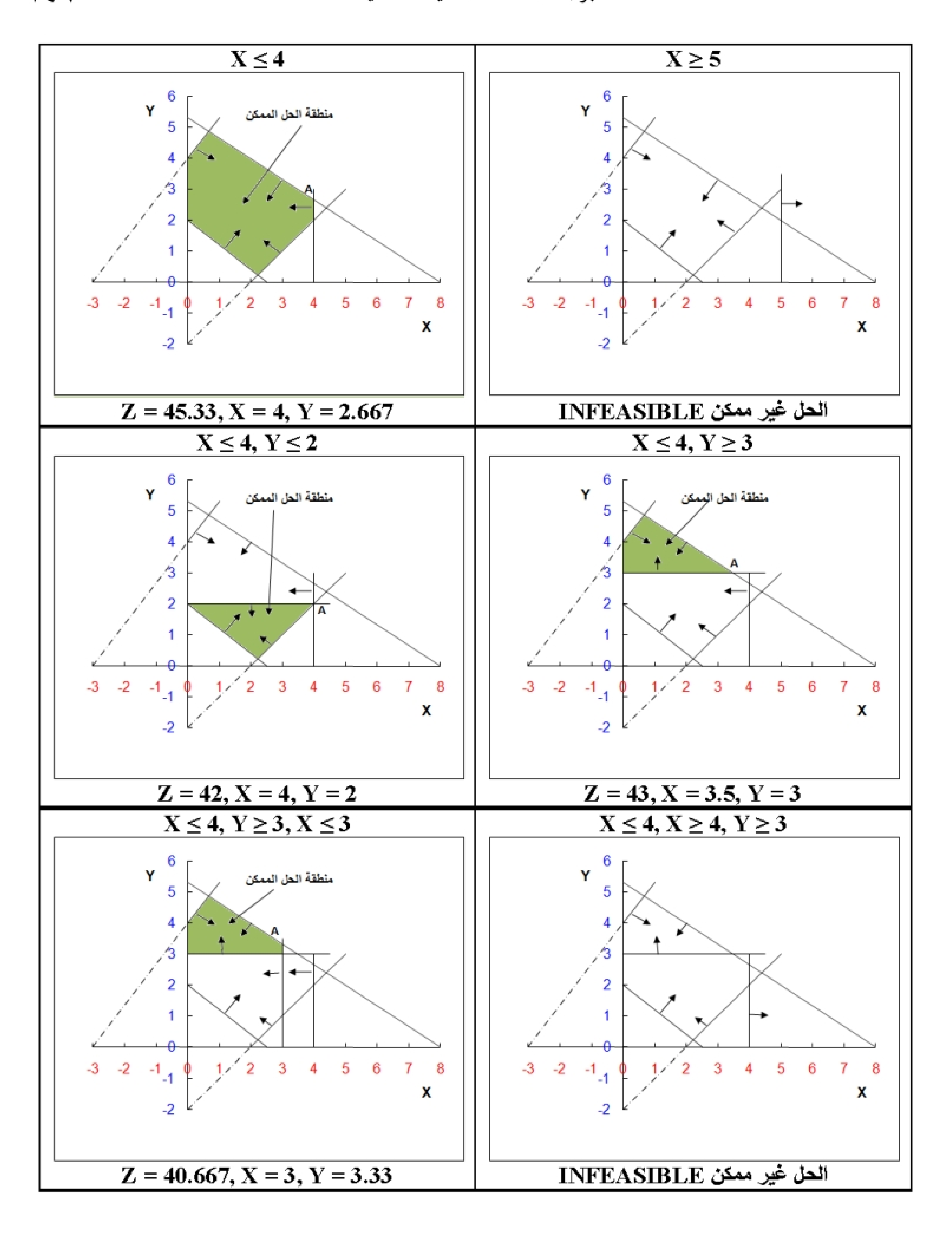
المسألة الفرعية السادسة: هي نفس المسألة الفرعية الثالثة، وبإضافة القيد التالي (X≤3). عند حل هذه المسألة الجديدة سنحصل على X=3, Y=3.33, Z=40.667 ، وحيث إن الحل الأمثل لا يعطي أعداداً صحيحة لجميع المتغيرات، وحيث إن المسألة في حالة Max ، وقيمة دالة الهدف أصغر من قيم

دالة الهدف لمسألة فرعية سابقة أعطت أعداداً صحيحة (المسألة الفرعية الرابعة)، فنتوقف وتكون المسألة الفرعية السادسة غير نشطة. حالة ٢.ج.

وحيث إنه لا يوجد أي تفريع جديد، فإن الحل الأمثل سيكون أفضل حل أعطى أعداداً صحيحة، وهو حل المسألة الفرعية الرابعة. الحل الأمثل للمسألة (٦ , ٩) هو X=4, Y=2, Z=42. حل هذه المسألة موضح في الأشكال رقم (٢ , ٩) إلى (٤ , ٩).



الشكل رقم (٢ , ٩). يوضح الشكل البياني للمسألة رقم (٦ , ٩).



الشكل رقم (٣ ,٩). يوضح الرسوم البيانية باستخدام طريقة الحد والفرع لحل مسألة رقم (٦ ,٩).

Max
Z = 47.2 UB
X = 4.4
Y = 2.4

X ≤ 4
X ≥ 5

Z = 45.33
X = 4
Y = 2.667

غير ممكن
INF
STOP

Y ≤ 2
Y ≥ 3

Z = 42
X = 4
Y = 2
STOP

Z = 43
X = 3.5
Y = 3

X ≤ 3
X ≥ 4

Z = 40.67
X = 3
Y = 3.33
STOP

غير ممكن
INF
STOP

الشكل رقم (٩ ,٤). يوضح طريقة الحد والفرع لحل مسألة رقم (٩ ,٦).

تمرين وحله

المصنع الوطني للحقائب الجلدية يرغب في صناعة ثلاثة أنواع من الحقائب: حقائب سفر صغيرة، وحقائب يد نسائية، ومحافظ جيب رجالية، وكل نوع يحتاج إلى آلة مختلفة للتصنيع. يبين الجدول التالي الربح للوحدة من كل نوع قبل احتساب تكلفة تشغيل الآلة الخاصة، وكمية المواد الخام (الجلود)، وساعات العمل اللازمة للتصنيع للوحدة من كل نوع. فإذا علمت أن كمية المواد الخام المتاحة يومياً تساوي ١٠٠ متر مربع، وساعات العمل المتاحة يومياً تساوي ١٢٠ ساعة، اكتب الصيغة الرياضية المناسبة لتعظيم الأرباح الكلية للمصنع يومياً.

المنتج	الربح للوحدة	المواد الخام	ساعات العمل	تكلفة تشغيل الآلة الخاصة
حقيبة سفر	300	3 م٢	2	400
حقيبة يد	150	1 م٢	1.5	300
محفظة جيب	120	0.5 م٢	2.5	400

الحل:

X_1: عدد حقائب السفر المنتجة.

X_2: عدد حقائب اليد المنتجة.

X_3: عدد محافظ الجيب المنتجة.

Y_1: تساوي ١ إذا تم إنتاج حقائب سفر وتساوي صفر إذا لم يتم الإنتاج.

Y_2: تساوي ١ إذا تم إنتاج حقائب يد وتساوي صفر إذا لم يتم الإنتاج.

Y_3: تساوي ١ إذا تم إنتاج محافظ جيب وتساوي صفر إذا لم يتم الإنتاج.

$\text{Max } z = 300X_1 + 150X_2 + 120X_3 - 400Y_1 - 300Y_2 - 400Y_3$

Subject To

$3X_1 + X_2 + 0.5X_3 \leq 100$

$2X_1 + 1.5X_2 + 2.5X_3 \leq 120$

$X_1 \leq MY_1$

$X_2 \leq MY_2$

$X_3 \leq MY_3$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ and Integers, $Y_1, Y_2, Y_3 = 0$ OR 1

الحل الأمثل لهذه المسألة: $X_1=29, X_2=0, X_3=24, Y_1=1, Y_2=0, Y_3=1, Z=10780$

تماريـــــن

السؤال الأول: أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية:

أ) باستخدام الرسم البياني

ب) باستخدام طريقة الحد والفرع

Max $z = 2X + 3Y$

S.T.

$2X + 4Y \leq 20$

$3X + 4Y \leq 25$

$X, Y \geq 0$ and Integers

السؤال الثاني: أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية:

أ) باستخدام الرسم البياني

ب) باستخدام طريقة الحد والفرع

Max $z = 4X + 3Y$

S.T.

$4X + 9Y \leq 26$

$8X + 5Y \leq 17$

$X, Y \geq 0$ and Integers

السؤال الثالث: أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية:

أ) باستخدام الرسم البياني

ب) باستخدام طريقة الحد والفرع

Min $w = 4X + 5Y$

S.T.

$2X + 8Y \geq 10$

$6X + 4Y \geq 14$

$2X - 3Y \leq 14$

$X, Y \geq 0$ and Integers

السؤال الرابع: يرغب أحد المستثمرين في استثمار ما لا يزيد عن M ريالاً في كل أو بعضٍ من سبع فرص استثمارية أمامه. فإذا كان العائد على الاستثمار i يساوي Ri وقيمة (تكلفة) الاستثمار i

تساوي Ci. الجدول التالي يبين الاستثمارات المتاحة والشروط الخاصة بها. المطلوب كتابة الصيغة الرياضية على شكل ILP لتكبير مجموع عوائد الاستثمارات لهذا المستثمر بمعلومية أن الاستثمارات لا يمكن أن تتجزأ.

الشروط	الاستثمار
لا يوجد	1
لا يجوز أن يستثمر في 2 إلا إذا استثمر في 1	2
لا يجوز أن يستثمر في 3 إلا إذا استثمر في 2	3
يجب أن يستثمر في 4 إذا استثمر في 1 و2	4
لا يجوز له أن يستثمر في 5 إذا استثمر في 1 أو 2	5
لا يجوز له أن يستثمر في 6 إذا استثمر في 2 أو 3	6
لا يجوز أن يستثمر في 7 إلا إذا استثمر في 2 ولم يستثمر في 3	7

المراجع
References

Bosch, R., and Trick, M.: Search Methodologies, Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques, ch.3, Springer, 2005.

Gould F.J., Eppen G.D., and Schmidt C.P.: Introductory Management Science, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991 .

Land A. H. and Doig A. G.: An automatic method of solving discrete programming problems. Econometrica, 28 (3), pp. 497–520, (1960 .(

Winston W. L.: Operations Research - Applications and Algorithms, 4th ed., Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc, Toronto, Ontario, Canada, 2004.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

اتخاذ القرارات	Decision Making
اختيارات محددة	Finite Choices
الاستمرارية	Continuity

ب

بحوث العمليات	Operations Research
برمجة الأعداد الصحيحة الخطية	Integer Linear Programming
برمجة الأعداد الصحيحة الخطية الثنائية (صفر-١)	0-1 Binary Integer Linear Programming
برمجة الأعداد الصحيحة الخطية الخالصة	Pure Integer Linear Programming
برمجة الأعداد الصحيحة الخطية المختلطة	Mixed Integer Linear Programming
برمجة خطية	Linear Programming
البرنامج الأصلي	Primal Problem
البرنامج الثنائي	Dual Problem

ت

التأكد	Certainty
التجميعية	Additivity

تحليل الحساسية	Sensitivity Analysis
التعليمات المقيدة	Restrictive Guidelines
التكلفة الحدية	Marginal Cost
التكلفة المخفضة	Reduced Cost
التناسب	Proportionality

ج

جمعية بحوث العمليات الأمريكية	Operations Research Society of America (ORSA)

ح

حالة التحلل	Degenerate Case
الحل الأمثل	Optimal Soloution
الحل بالرسم البياني	Graphical Solution
حل أمثل بديل أو متعدد	Alternative or Multiple Optimal Solution
حل أمثل وحيد	Unique Optimal Solution
حل أولى ممكن	Initial Basic Feasible Solution (IBFS)
حل غير محدد	Unbounded Solution

د

دالة الهدف	Objective Function
الدوران	Cycling

ز

الزيادة المسموح بها	Allowable Increase

س

السعر الثنائي أو سعر الظل	Dual Price or Shadow Price

ش

الشروط المنطقية	Logical Conditions

شكل محدب	convex Shape

ص

الصيغة القياسية	Standard Form

ط

طرق رياضية استدلالية	Heuristics
طريقة M الكبيرة	Big M Method
طريقة أقل التكاليف	Minimum Cost Method
طريقة التوزيع المعدلة	Modified Distribution Method
طريقة الحجر المتدحرج	Stepping Stone Method
طريقة الحد و الفرع	Branch & Bound Algorithm
طريقة الركن الشمالي الغربي	Northwest Corner Method
طريقة السمبلكس	Simplex Method
طريقة المرحلتين	Two-Phase Method
الطريقة الهنغارية	Hungarian Method
طريقة فوجل التقريبية	Vogel Approximation Method

ع

علم الإدارة	Management Science
عملية الصفوف	Row Operations

ف

فرع غير نشط	Inactive Branch
فرع نشط	Active Branch

ق

قيد عدم السلبية	Non-negativity Constraint
قيود	Constraints

القيود المكررة	Redundant Constraints
القيود النشطة	Active constraints
القيود غير النشطة	Inactive constraints

م

المتغير الاصطناعي	Artificial Variable
المتغير الخارج	Exiting Variable
المتغير الداخل	Entering Variable
المتغير غير محدد الإشارة	unrestricted in sign
المتغيرات الأساسية	Basic Variables
متغيرات القرار	Decision Variables
المتغيرات غير الأساسية	Nonbasic Variables
المدخلات التي لا يمكن التحكم بها	Uncontrollable Inputs
المدخلات التي يمكن التحكم بها	Controllable Inputs
مسألة التخصيص	The Assignment Problem
المسألة غير ممكنة الحل	Infeasible Problem
معالم	parameter
معهد بحوث العمليات و علم الإدارة	Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS)
معهد علم الإدارة	The Institute of Management Sciences (TIMS)
المكمل أو الفائض	Slack or Surplus
منطقة الحلول الممكنة	Feasible Region
المنفعة	Utility
الموارد المحددة	Limited Resources

ن

النقصان المسموح به	Allowable Decrease

Optimal Solution Point	نقطة الحل الأمثل
Probabilistic Models	نماذج احتمالية
Quantitative Models	نماذج كمية
Deterministic Models	نماذج محددة

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Active Branch	فرع نشط
Active constraints	القيود النشطة
Additivity	التجميعية
Allowable Decrease	النقصان المسموح به
Allowable Increase	الزيادة المسموح بها
Alternative or Multiple Optimal Solution	حل أمثل بديل أو متعدد
Artificial Variable	المتغير الاصطناعي

B

Basic Variables	المتغيرات الأساسية
Big M Method	طريقة M الكبيرة
Branch & Bound Algorithm	طريقة الحد و الفرع

C

Certainty	التأكد
Constraints	قيود
Continuity	الاستمرارية
Controllable Inputs	المدخلات التي يمكن التحكم بها

شكل محدب	convex Shape
الدوران	Cycling

D

اتخاذ القرارات	Decision Making
متغيرات القرار	Decision Variables
حالة التحلل	Degenerate Case
نماذج محددة	Deterministic Models
السعر الثنائي أو سعر الظل	Dual Price or Shadow Price
البرنامج الثنائي	Dual Problem

E

المتغير الداخل	Entering Variable
المتغير الخارج	Exiting Variable

F

منطقة الحلول الممكنة	Feasible Region
اختيارات محددة	Finite Choices

G

الحل بالرسم البياني	Graphical Solution

H

طرق رياضية استدلالية	Heuristics
الطريقة الهنغارية	Hungarian Method

I

فرع غير نشط	Inactive Branch
القيود غير النشطة	Inactive constraints

Infeasible Problem	المسألة غير ممكنة الحل
Initial Basic Feasible Solution (IBFS)	حل أولي ممكن
Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS)	معهد بحوث العمليات و علم الإدارة
Integer Linear Programming	برمجة الأعداد الصحيحة الخطية

L

Limited Resources	الموارد المحددة
Linear Programming	برمجة خطية
Logical Conditions	الشروط المنطقية

M

Management Science	علم الإدارة
Marginal Cost	التكلفة الحدية
Minimum Cost Method	طريقة أقل التكاليف
Mixed Integer Linear Programming	برمجة الأعداد الصحيحة الخطية المختلطة
Modified Distribution Method	طريقة التوزيع المعدلة

N

Nonbasic Variables	المتغيرات غير الأساسية
Non-negativity Constraint	قيد عدم السلبية
Northwest Corner Method	طريقة الركن الشمالي الغربي

O

Objective Function	دالة الهدف
Operations Research	بحوث العمليات
Operations Research Society of America (ORSA)	جمعية بحوث العمليات الأمريكية
Optimal Solution	الحل الأمثل
Optimal Solution Point	نقطة الحل الأمثل

P

Parameter — معالم

Primal Problem — البرنامج الأصلي

Probabilistic Models — نماذج احتمالية

Proportionality — التناسب

Pure Integer Linear Programming — برمجة الأعداد الصحيحة الخطية الخالصة

Q

Quantitative Models — نماذج كمية

R

Reduced Cost — التكلفة المخفضة

Redundant Constraints — القيود المكررة

Restrictive Guidelines — التعليمات المقيدة

Row Operations — عملية الصفوف

S

Sensitivity Analysis — تحليل الحساسية

Simplex Method — طريقة السمبلكس

Slack or Surplus — المكمل أو الفائض

Standard Form — الصيغة القياسية

Stepping Stone Method — طريقة الحجر المتدحرج

T

The Assignment Problem — مسألة التخصيص

The Institute of Management Sciences (TIMS) — معهد علم الإدارة

Two-Phase Method — طريقة المرحلتين

U

حل غير محدد	Unbounded Solution
المدخلات التي لا يمكن التحكم بها	Uncontrollable Inputs
حل أمثل وحيد	Unique Optimal Solution
المتغير غير محدد الإشارة	Unrestricted in sign
المنفعة	Utility

V

طريقة فوجل التقريبية	Vogel Approximation Method

كشاف الموضوعات

أ

ب

ت

ج

ح

د

ز

س

ش

ص

ط

ع

ف

ن